

Proposta de Resolução do Exame de Matemática A

Cód. 635 - 1ª Fase 2012

21 de Junho

Grupo I

Questões	1	2	3	4	5	6	7	8
Versão 1	B	D	C	B	A	C	A	C
Versão 2	C	B	D	B	C	A	D	A

1.

$$P(\bar{A}) = \frac{7}{10} \quad P(A) = 1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$$

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{3}{4} &= \frac{3}{10} + P(B) - \frac{3}{10}P(B) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{3}{4} - \frac{3}{10} &= \frac{7}{10}P(B) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{9}{20} \times \frac{10}{7} &= P(B) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow P(B) &= \frac{90}{140} = \frac{9}{14} \end{aligned}$$

2.

$$P = 1 - \frac{2 \times 6!}{7!} = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$$

3.

${}^{12}C_7$: distribuição dos 7 copos brancos pelos 12 compartimentos

5A_3 : distribuição dos 3 copos de cores distintas pelos restantes 5 compartimentos

$${}^{12}C_7 \times {}^5A_3$$

4.

$$f(x) = e^x - 3$$

$$f(x) = -x - \frac{3}{2} \Leftrightarrow e^x - 3 = -x - \frac{3}{2} \Leftrightarrow e^x - 3 + x + \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x + x - \frac{3}{2} = 0$$

Seja $g(x) = e^x + x - \frac{3}{2}$. Como $g(x)$ é contínua em \mathbb{R} e atendendo a que:

$$g(0) < 0 ; g\left(\frac{1}{5}\right) < 0 ; g\left(\frac{1}{4}\right) > 0 ; g\left(\frac{1}{3}\right) > 0 ; g(1) > 0$$

Então: $g\left(\frac{1}{5}\right) \times g\left(\frac{1}{4}\right) < 0$, pelo que $f(x) = -x - \frac{3}{2}$ tem pelo menos um zero em $\left] \frac{1}{5}, \frac{1}{4} \right[$.

5.

Uma vez que $f(x)$ é contínua para $x < a$ e para $x > a$, para assegurar a continuidade em \mathbb{R} temos que

$$\text{verificar: } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} \left[\log_3 \left(-x - \frac{1}{3} \right) \right] = \log_3 \left(-a - \frac{1}{3} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(a) = 2$$

$$f(a) = g(a) = 2$$

$$\text{Assim, temos: } \log_3 \left(-a - \frac{1}{3} \right) = 2 \Leftrightarrow -a - \frac{1}{3} = 3^2 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{3} - 9 \Leftrightarrow a = -\frac{28}{3}$$

6.

$$f''(-3) > 0$$

7.

$$\text{Na forma trigonométrica: } 3i = 3 \text{cis} \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\rho \text{cis} \theta}{3 \text{cis} \frac{\pi}{2}} = \frac{\rho}{3} \text{cis} \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\text{Assim, temos que: } \frac{\rho}{3} < \rho$$

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi \Leftrightarrow 0 < \theta - \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2}, \text{ ou seja: } \frac{w}{3i} \text{ pode ser igual a } z_1$$

8.

$$3 \leq |z| \leq 6 \wedge -\pi \leq \arg(z - (-1 + i)) \leq \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow 3 \leq |z| \leq 6 \wedge -\pi \leq \arg(z + 1 - i) \leq \frac{3\pi}{4}$$

Grupo II

1.

1.1

$$z_1 = (-2+i)^3 = (-2)^3 + 3 \times (-2)^2 \times i + 3 \times (-2) \times i^2 + i^3 = -2 + 11i$$

$$z_2 = \frac{1+28i}{2+i} \times \frac{2-i}{2-i} = \frac{2-i+56i-28i^2}{4-i^2} = \frac{30+55i}{5} = 6+11i$$

$$z^3 + (-2+11i) = 6+11i \Leftrightarrow z^3 = 6+11i+2-11i \Leftrightarrow z^3 = 8 \Leftrightarrow z^3 = 8cis0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = \sqrt[3]{8}cis\left(0+k \times \frac{2\pi}{3}\right) \Leftrightarrow z = 2cis\left(k \times \frac{2\pi}{3}\right)$$

Para $k = 0$, $z = 2cis0$

Para $k = 1$, $z = 2cis\frac{2\pi}{3}$

Para $k = 2$, $z = 2cis\left(2 \times \frac{2\pi}{3}\right) = 2cis\frac{4\pi}{3}$

1.2

Sabemos que $w^n = z$ e também $\left(\frac{1}{w}\right)^n = z$.

Assim, temos que:

$$w^n = \left(\frac{1}{w}\right)^n \Leftrightarrow w^n = \frac{1}{w^n} \Leftrightarrow w^n \times w^n = 1 \Leftrightarrow (w^n)^2 = 1 \Leftrightarrow w^n = \pm\sqrt{1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow w^n = -1 \vee w^n = 1 \Leftrightarrow z = -1 \vee z = 1$$

2.

2.1

Consideram-se os acontecimentos:

A: «O aluno escolhido é um rapaz»

B: «O aluno escolhido tem excesso de peso»

e os respetivos acontecimentos contrários.

- Considerando que $P(\bar{A}) = 55\%$ podemos organizar a informação do enunciado numa tabela:

	A	\bar{A}	Total
B			
\bar{B}			
Total	100% - 55% = =45%	55%	100%

- Considerando que $P(B | \bar{A}) = 30\%$ podemos calcular $P(B \cap \bar{A})$ e $P(\bar{B} \cap \bar{A})$:

	A	\bar{A}	Total
B		$0,3 \times 55\% = 16,5\%$	
\bar{B}		$0,7 \times 55\% = 38,5\%$	
Total	$100\% - 55\% = 45\%$	55%	100%

- Considerando que $P(B | A) = 40\%$ podemos calcular $P(B \cap A)$ e $P(\bar{B} \cap A)$:

	A	\bar{A}	Total
B	$0,6 \times 45\% = 27\%$	$0,3 \times 55\% = 16,5\%$	$27\% + 16,5\% = 43,5\%$
\bar{B}	$0,4 \times 45\% = 18\%$	$0,7 \times 55\% = 38,5\%$	$18\% + 38,5\% = 56,5\%$
Total	$100\% - 55\% = 45\%$	55%	100%

Assim, de acordo com a informação da tabela, temos que a probabilidade de que o aluno escolhido seja rapaz, sabendo que tem excesso de peso, ou seja, $P(A | B)$, é dada por:

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{27\%}{43,5\%} = \frac{18}{29}$$

2.2

Como 55 % dos alunos são raparigas e existem 200 alunos temos $200 \times 0,55 = 110$ raparigas e $200 - 110 = 90$ rapazes.

Assim a probabilidade de escolher duas raparigas e um rapaz, numa seleção aleatória de três alunos é dada por $\frac{{}^{110}C_2 \times {}^{90}C_1}{{}^{200}C_3} \simeq 0,41$.

3.

Como no saco existem 5 bolas e são extraídas 4, existem apenas 5 casos possíveis.

O produto dos números extraídos é 0 (zero) sempre que a bola com o número 0 tenha sido extraída, ou seja em 4 dos 5 casos possíveis.

No restante caso, as bolas extraídas não incluem a bola com o número 0, ou seja são extraídas as bolas com os números -2,-1, 1 e 2; logo o produto dos números saídos é $-2 \times (-1) \times 1 \times 2 = 4$.

Como as bolas são extraídas simultaneamente existem ${}^5C_4 = 5$ casos possíveis. Assim

$P(X = 0) = \frac{4}{5}$ (pois o zero está presente em 4 das 5 extrações) e $P(X = 4) = \frac{1}{5}$ (pois o zero não está presente em apenas 1 das 5 extrações).

4.

4.1

Para determinar o zero da função f vamos resolver a equação $f(x) = 0$:

$$e^{x-2} - \frac{4e^{-x} + 4}{e^2} = 0 \Leftrightarrow e^2 e^{x-2} - (4e^{-x} + 4) = 0 \Leftrightarrow e^x - 4e^{-x} - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x - \frac{4}{e^x} - 4 = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 4 - 4e^x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} - 4e^x - 4 = 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 - 4e^x - 4 = 0$$

sendo $y = e^x$ vem:

$$y^2 - 4y - 4 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(-4)}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 16}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{4 \pm \sqrt{32}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{4 \pm 4\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow y = 2 + 2\sqrt{2} \vee y = 2 - 2\sqrt{2}$$

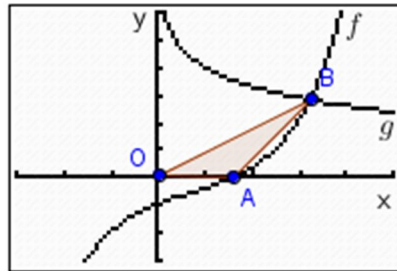
como $y = e^x$ temos $e^x = 2 + 2\sqrt{2} \vee e^x = 2 - 2\sqrt{2}$

como $2 - 2\sqrt{2} < 0$, $e^x = 2 - 2\sqrt{2}$ é uma equação impossível, e portanto:

$e^x = \ln(2 + 2\sqrt{2}) \Leftrightarrow x = \ln(2 + 2\sqrt{2})$ é a única solução da equação.

4.2

Reproduz-se a seguir o gráfico visualizado na calculadora:



Calculando o zero da função f observamos que a abscissa do ponto A é 1,57.

Calculando a interseção do gráfico das duas funções, temos que as coordenadas do ponto B são (3,22 ; 2,83).

Assim, considerando a base do triângulo o lado $[OA]$, podemos considerar para a medida da base 1,57 *u.m.* e para a medida da altura 2,83 *u.m.*, logo

$$A_{[OAB]} = \frac{1,57 \times 2,83}{2} = 2,22; \text{ ou seja a área do triângulo } [AOB] \text{ é de } 2,2 \text{ u.m.}$$

aproximadamente.

5.

5.1

Se existirem assíntotas não verticais o respetivo declive é dado por

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ ou } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Calculando $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ temos:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x e^{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1-x} = e^{1+\infty} = e^{+\infty} = +\infty$$

pelo que não existem assíntotas quando $x \rightarrow -\infty$.

Calculando $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ temos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln(x+1) - x \ln(x) + 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x+1) - \ln(x) + 3) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x+1}{x} + 3 = \ln \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) + 3 = \ln(1) + 3 = 3 \end{aligned}$$

pelo que, a existir uma assíntota quando $x \rightarrow +\infty$, o respetivo declive será 3.

A ordenada na origem é dada por: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx)$

Calculando:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln(x+1) - x \ln(x) + 3x - 3x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln(x+1) - x \ln(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \ln \frac{x+1}{x}\right) \end{aligned}$$

considerando $y = \frac{1}{x}$, se $x \rightarrow +\infty$ então $y \rightarrow 0^+$, e

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \ln \frac{x+1}{x}\right) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{y} \ln \frac{\frac{1}{y} + 1}{\frac{1}{y}}\right) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1$$

Pelo que a reta de equação $y = 3x + 1$ é a única assíntota do gráfico de f .

5.2

Para determinar a equação da reta tangente, começamos por determinar o respetivo declive, ou seja $f'(-1)$. Assim determina-se a derivada da função f para valores inferiores a 0.

$$f'(x) = (x)'e^{1-x} + x(e^{1-x})' = e^{1-x} + x(-1 \times e^{1-x}) = e^{1-x} - x e^{1-x}$$

Assim, o declive da reta é $m = f'(-1) = e^{1-(-1)} - (-1)e^{1-(-1)} = e^2 + e^2 = 2e^2$

Calculando $f(-1) = (-1)e^{1-(-1)} = -e^2$ temos que o ponto de tangência tem de coordenadas $(-1, -e^2)$ e é um ponto que pertence à reta.

Assim, substituindo as coordenadas na equação $y = 2e^2x + b$ temos:

$$-e^2 = 2e^2(-1) + b \Leftrightarrow -e^2 - 2e^2(-1) = b \Leftrightarrow -e^2 + 2e^2 = b \Leftrightarrow e^2 = b$$

Ou seja a equação da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abscissa -1 é

$$y = 2e^2x + e^2$$

6.

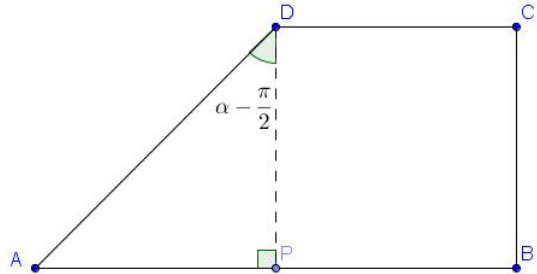
6.1

Considerando um ponto P sobre o lado $[AB]$,

tal que $[DP]$ é perpendicular ao lado $[AB]$,

temos que:

- $\overline{DP} = 1$ e $\overline{PB} = 1$
- $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\overline{DP}}{\overline{DA}} \Leftrightarrow \overline{DA} = \frac{1}{\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}$
- $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\overline{AP}}{\overline{DP}} \Leftrightarrow \overline{AP} = \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$



Como $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\alpha$ e $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$ vem que

$$\overline{DA} = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} \text{ e } \overline{AP} = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$$

Assim o perímetro do trapézio é dado por:

$$\begin{aligned} P_{[ABCD]} &= \overline{AP} + \overline{PB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} + 1 + 1 + 1 + \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = 3 - \frac{\operatorname{cosec}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} + \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = \\ &= 3 + \frac{-\operatorname{cosec}\alpha + 1}{\operatorname{sen}\alpha} = 3 + \frac{1 - \operatorname{cosec}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} \end{aligned}$$

Ou seja pela função $P(\alpha) = 3 + \frac{1 - \operatorname{cosec}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$ para $\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$.

6.2

Começamos por determinar a derivada da função P :

$$\begin{aligned} P'(\alpha) &= (3)' + \frac{(1 - \operatorname{cosec}\alpha)' \operatorname{sen}\alpha - (1 - \operatorname{cosec}\alpha)(\operatorname{sen}\alpha)'}{\operatorname{sen}^2\alpha} = \frac{\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\alpha - (1 - \operatorname{cosec}\alpha)(\operatorname{cosec}\alpha)'}{\operatorname{sen}^2\alpha} = \\ &= \frac{\operatorname{sen}^2\alpha - (\operatorname{cosec}\alpha - \operatorname{cosec}^2\alpha)}{\operatorname{sen}^2\alpha} = \frac{\operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{cosec}\alpha + \operatorname{cosec}^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha} = \frac{\operatorname{sen}^2\alpha + \operatorname{cosec}^2\alpha - \operatorname{cosec}\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha} = \\ &= \frac{1 - \operatorname{cosec}\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha} \end{aligned}$$

$$\text{Como } \operatorname{tg}^2\theta + 1 = \frac{1}{\operatorname{cosec}^2\theta}$$

$$\text{temos } (-\sqrt{8})^2 + 1 = \frac{1}{\operatorname{cosec}^2\theta} \Leftrightarrow 8 + 1 = \frac{1}{\operatorname{cosec}^2\theta} \Leftrightarrow \operatorname{cosec}^2\theta = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \operatorname{cosec}\theta = \pm \frac{1}{3}$$

$$\text{Como } \frac{\pi}{2} < \theta < \pi, \operatorname{cosec}\theta = -\frac{1}{3}$$

$$\text{Também sabemos que } \operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta = 1$$

$$\text{logo } \operatorname{sen}^2\theta = 1 - \frac{1}{9} \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2\theta = \frac{8}{9}$$

$$\text{Assim temos que } P'(\theta) = \frac{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)}{\frac{8}{9}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{8}{9}} = \frac{3}{2}$$