



PROPOSTA DE TESTE INTERMÉDIO N.º 4

MATEMÁTICA A – 12.º ANO

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

GRUPO I - ITENS DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1.

$${}^{10}C_4 \times 6! = 151200$$

↓
escolhem-se quatro
elementos para o grupo
com tenetas indiferenciadas

→ no grupo com tenetas diferenciadas os
seis elementos podem permutar
de 6! maneiras distintas.

ou

$${}^{10}A_6 = 151200$$

↓
escolhem-se ordenadamente seis elementos para o grupo
com tenetas diferenciadas, os restantes quatro ficam automaticamente
no grupo com tenetas diferenciadas.

Resposta: C

Exercício EXTRA: $\frac{{}^{10}C_5}{2} = 126$

Divide-se por 2 porque:

Se designarmos as pessoas por $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$,
uma das escolhas possíveis é:

ABCDE ficando FGHIJ para o outro grupo

Se considerássemos apenas ${}^{10}C_5$ então estaríamos a

Considerem me:

ABCDE ficando FGHIJ para o outro grupo
e

FGHIJ ficando ABCDE " " " "

Como escolhas diferentes, sendo que estas escolhas são a mesma! Se o problema pedisse para dividir o grupo em dois grupos de cinco pessoas para que cada grupo viajasse num carro, por exemplo, aí o número de maneiras possíveis seria $^{10}C_5$.

2.

$$\log_a (b^2) = c \Rightarrow 2 \log_a b = c \Rightarrow \log_a b = \frac{c}{2}$$

$$\log_a b + \log_b (a^2) - \log_{\sqrt[3]{a}} (b^3) =$$

$$= \frac{c}{2} + \frac{\log_a (a^2)}{\log_a b} - \frac{\log_a (b^3)}{\log_a (\sqrt[3]{a})} =$$

$$= \frac{c}{2} + \frac{2}{\frac{c}{2}} - \frac{3 \log_a b}{\log_a (a^{1/3})} = \frac{c}{2} + \frac{4}{c} - \frac{3 \times \frac{c}{2}}{\frac{1}{3}} =$$

$$= \frac{c}{2} + \frac{4}{c} - \frac{9c}{2} = \frac{c^2 + 8 - 9c^2}{2c} = \frac{8 - 8c^2}{2c} =$$

$$= \frac{4 - 4c^2}{c} = \frac{(2 - 2c)(2 + 2c)}{c}$$

Resposta: A

3.

Tem-se que $u_n = \frac{\ln(\frac{1}{n})}{n^{1/5}} = \frac{\overbrace{\ln 1 - \ln(n)}^0}{n^{1/5}} = -\frac{\ln(n)}{n^{1/5}}$

logo

$$\lim (-u_n - 2) = \lim \left(\frac{\ln(n)}{n^{1/5}} - 2 \right) =$$

$$= -2 + \lim \frac{\ln(n)}{n} \times \lim \frac{1}{n^{1/4}} =$$

$$= -2 + 0^+ \times \frac{1}{+\infty} = -2 + 0^+ = -2^+$$

Portanto, pela definição de limite segundo Heine:

$$\lim f(-u_n - 2) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 2$$

Resposta: D

4.

Tem-se que o declive de recte R é dado por $\operatorname{tg} \alpha$. Assim:

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\frac{10}{100}} \Leftrightarrow 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{100}{10} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha = 9 \quad \text{Como } \alpha \in]0; \frac{\pi}{2}, \text{ vem } \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{9} = 3$$

↓
declive de recte R é positivo

Logo, como $(0, 2) \in \mathbb{R}$, tem-se, $\mathbb{R}: y = 3x + 2$.

Portanto:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 3, \text{ pelo que, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{g(x)} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - 3x) = 2$$

Assim:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2}{g(x)} - x \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - xg(x)}{g(x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x(g(x) - 3x)}{g(x)} = - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{g(x)} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - 3x) = \\ &= - \frac{1}{3} \times 2 = - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Resposta: B

5.

f é uma função quadrática, cujo seu gráfico (que é uma parábola) tem a concavidade voltada para cima. Logo $a > 0$.

Tem-se:

$$h(x) = e^{-x} \times f(x) = e^{-x} \times (ax^2 + ax) = a e^{-x} (x^2 + x)$$




$$\begin{aligned} h'(x) &= -a e^{-x} (x^2 + x) + a e^{-x} (2x + 1) = \\ &= a e^{-x} (-x^2 - x + 2x + 1) = a e^{-x} (-x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h''(x) &= -ae^{-x}(-x^2+x+1) + ae^{-x}(-2x+1) = \\
 &= ae^{-x}(x^2-x-1-2x+1) = \\
 &= ae^{-x}(x^2-3x)
 \end{aligned}$$

$$h''(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{ae^{-x}}_{\text{impossível}} = 0 \vee x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(x-3) = 0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=3$$

Como $ae^{-x} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, o sinal de h'' depende apenas do sinal de $x^2 - 3x$.

x	$-\infty$	0		3	$+\infty$
$h''(x)$	+	0	-	0	+
$h(x)$		P.I.		P.E.	

O gráfico de h tem a concavidade voltada para baixo em $[0, 3]$

Resposta: A

Grupo II - ITENS DE RESPOSTA ABERTA

1.

$$\begin{aligned}
 P(\bar{A}) &= 3P(A) \Leftrightarrow 1 - P(A) = 3P(A) \Leftrightarrow 1 = 4P(A) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow P(A) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow P(A) = 0,25
 \end{aligned}$$

Assim vem:

$$P(A) + P(B) + P(A|B) = 1 \quad (\Rightarrow)$$

$$\Leftrightarrow 0,25 + P(B) + \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 1 \quad (\Rightarrow)$$

$\times P(B) \quad \times P(B) \quad \times P(B)$

$$\Leftrightarrow 0,25 P(B) + [P(B)]^2 + P(A \cap B) = P(B) \quad (\Rightarrow)$$

$P(B) > 0$

$$\Leftrightarrow 0,25 P(B) - P(B) + P^2(B) + 0,09 = 0 \quad (\Rightarrow)$$

$$\Leftrightarrow P^2(B) - 0,75 P(B) + 0,09 = 0 \quad (\Rightarrow)$$

$$\Leftrightarrow P(B) = \frac{0,75 \pm \sqrt{(-0,75)^2 - 4 \times 1 \times 0,09}}{2 \times 1} \quad (\Rightarrow)$$

$$\Leftrightarrow P(B) = \frac{0,75 \pm \sqrt{0,2025}}{2} \quad (\Rightarrow)$$

$$\Leftrightarrow P(B) = \frac{0,75 \pm 0,45}{2} \quad (\Rightarrow)$$

$$\Leftrightarrow P(B) = 0,15 \quad \vee \quad P(B) = 0,6$$

Como $P(B) > P(A)$, então $P(B) =$

2.

$$2.1. \quad f(1) = 1 \times \ln 1 - 2 \times 1 = 1 \times 0 - 2 = -2$$

$$f'(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x \ln x - 2x + 2}{x - 1} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x \ln x}{x-1} - \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x-2}{x-1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x \ln x}{x-1} - 2 \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x-1}$$

$$= \lim_{1) \ y \rightarrow 0^+} \frac{(y+1) \ln(y+1)}{y} - 2 =$$

i) Mudança de variável

Se $x \rightarrow 1^\pm$ então $x-1 \rightarrow 0^\pm$

Seja $y = x-1 \Leftrightarrow x = y+1$

$y \rightarrow 0^\pm$

$$= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y \ln(y+1) + \ln(y+1)}{y} - 2 =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y \ln(y+1)}{y} + \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\ln(y+1)}{y} - 2 =$$

$$= \ln(0+1) + 1 - 2 = \ln 1 + 1 - 2 = 0 + 1 - 2 = -1$$

$$f'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{2e^{0,5-0,5x}}{x-2} + 2}{x-1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{2e^{0,5-0,5x}}{x-2} + 2x-4}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2e^{0,5-0,5x} + 2x-4}{(x-1)(x-2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2e^{-0,5(x-1)} - 2}{(x-1)(x-2)} + \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x-2}{(x-1)(x-2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2}{x-2} \times \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{-0,5(x-1)} - 1}{x-1} + \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$

$$= \frac{2}{1-2} \times \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{e^{-0,5y} - 1}{y} + \frac{2}{1-2} =$$

$$= -2 \times \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{e^{-0,5y} - 1}{-0,5y} \times (-0,5) - 2 =$$

$$= -2 \times 1 \times (-0,5) - 2 = 1 - 2 = -1$$

↓

Se $y \rightarrow 0^-$ então $-0,5y \rightarrow 0^+$

Logo, como $f'(1^-) = f'(1^+) = -1$, então $f'(1) = -1$

Seja t a recta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 1. Logo:

$m_t = f'(1) = -1$, portanto um vector director de t pode ser $\vec{t} = (1, -1)$

O ponto de coordenadas $(1, f(1)) = (1, -2)$ é t .

Assim, uma equação vectorial de t pode ser:

$$t: (x, y) = (1, -2) + k(1, -1), \quad k \in \mathbb{R}$$

2.2.

Tem-se que $(f \circ g)'(-1) = f'(g(-1)) \times g'(-1)$. Assim:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(\sqrt[3]{x^3 - 2x} \right)' = \left((x^3 - 2x)^{\frac{1}{3}} \right)' = \\ &= \frac{1}{3} (x^3 - 2x)^{\frac{1}{3}-1} \times (x^3 - 2x)' = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3} (x^3 - 2x)^{-\frac{2}{3}} \times (3x^2 - 2) =$$

$$= \frac{1}{3} \frac{1}{(x^3 - 2x)^{2/3}} \times (3x^2 - 2) = \frac{3x^2 - 2}{3 \sqrt[3]{(x^3 - 2x)^2}}$$

Logo:

$$g(-1) = \sqrt[3]{(-1)^3 - 2 \times (-1)} = \sqrt[3]{-1 + 2} = \sqrt[3]{1} = 1$$

$$g'(-1) = \frac{3 \times (-1)^2 - 2}{3 \sqrt[3]{((-1)^3 - 2 \times (-1))^2}} = \frac{3 - 2}{3 \sqrt[3]{1^2}} = \frac{1}{3 \times 1} = \frac{1}{3}$$

Portanto:

$$(f \circ g)'(-1) = f'(g(-1)) \times g'(-1) = f'(1) \times \frac{1}{3} = -1 \times \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$$

2.3. f é derivável em $x=1$ e portanto também é contínua.

Para $x \in]-\infty, 1[$, tem-se:

em $x=1$.

$$f'(x) = \frac{2 \times (-0,5) e^{0,5-0,5x} (x-2) - 2 e^{0,5-0,5x} \times 1}{(x-2)^2} =$$

$$= \frac{-e^{0,5-0,5x} (x-2) - 2 e^{0,5-0,5x}}{(x-2)^2} =$$

$$= \frac{e^{0,5-0,5x} (-x+2-2)}{(x-2)^2} = \frac{-x e^{0,5-0,5x}}{(x-2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x e^{0,5-0,5x} = 0 \wedge (x-2)^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow (-x=0 \vee \underbrace{e^{0,5-0,5x}=0}_{\text{Impossível}}) \wedge x \neq 2$$

$$\Leftrightarrow x=0 \wedge x \neq 2$$

• Para $x \in [1, +\infty[$, tem-se:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \ln x + x \times \frac{1}{x} - 2 = \\ &= \ln x + 1 - 2 = \ln x - 1 \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e^1 \Leftrightarrow x = e$$

x	$-\infty$	0	1	e	$+\infty$
$* f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	\nearrow	máx.	\searrow	\nearrow	\nearrow

• Para $x \in]-\infty, 1[$, o sinal de f' depende apenas do sinal de $-x$, pois $e^{0,5-0,5x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ e $(x-2)^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

f é crescente em $]-\infty, 0]$ e em $[e, +\infty[$, é decrescente em $[0, e]$, tem máximo relativo em $x=0$ e tem mínimo relativo em $x=e$.

2.4.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2e^{0,5-0,5x}}{x-2} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{2e^{0,5+0,5y}}{-y-2} =$$

1) Mudança de variável

Se $x \rightarrow -\infty$ então $-x \rightarrow +\infty$
 Seja $y = -x \Rightarrow x = -y$
 $y \rightarrow +\infty$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{2e^{0,5} \times e^{0,5y}}{y(-1 - \frac{2}{y})} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{(e^{0,5})^y}{y} \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{2e^{0,5}}{-1 - \frac{2}{y}} =$$

$$= +\infty \times \frac{2e^{0,5}}{-1 - \frac{2}{+\infty}} = +\infty \times \frac{2e^{0,5}}{-1 - 0} =$$

\downarrow
 $e^{0,5} > 1$

$$= +\infty \times (-2e^{0,5}) = -\infty$$

Quando $x \rightarrow -\infty$, o gráfico de f não tem assíntota horizontal.

3.

3.1. Para g ser contínua em todo o seu domínio, então tem de o ser em $x=0$.

$$g \text{ é contínua em } x=0 \text{ se } \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = g(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (\sin x + \cos(2x)) = \sin(0) + \cos(2 \times 0) =$$

$$= 0 + \cos(0) = 1$$

$$g(0) = \sin(0) + \cos(2 \times 0) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 + 3x}{e - e^{ax+1}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x^2+3)}{e - e^{ax} \times e} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x^2+3)}{-e(e^{ax}-1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{e^{ax}-1} \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2+3}{-e} =$$

$$= \frac{1}{a} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax}{e^{ax}-1} \times \frac{0+3}{-e} =$$

$$= \frac{1}{a} \times 1 \times \frac{3}{-e} = -\frac{3}{ae}$$

↓

Se $x \rightarrow 0^+$ então $ax \rightarrow 0$

$$\text{Se } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \text{ então } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1} = 1$$

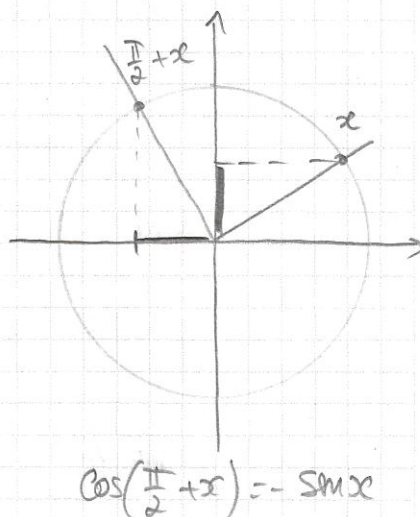
$$\text{Logo, } -\frac{3}{ae} = 1 \Leftrightarrow -\frac{3}{e} = a //$$

3.2. Para $x \in [-2\pi, 0]$, tem-se:

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x + \cos(2x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(2x) = -\sin x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + x + 2k\pi \quad \vee \quad 2x = -\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \vee \quad 2x = -\frac{\pi}{2} - x + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \vee \quad 3x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (=)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \vee \quad x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$k=0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} \quad \vee \quad x = -\frac{\pi}{6}$$

$$k=1 \rightarrow \quad \vee \quad x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$$

$$k=-1 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} - 2\pi = -\frac{3\pi}{2} \quad \vee \quad x = -\frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{5\pi}{6}$$

$$k=-2 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} - 4\pi = -\frac{7\pi}{2} \quad \vee \quad x = -\frac{\pi}{6} - \frac{4\pi}{3} = -\frac{9\pi}{6} = -\frac{3\pi}{2}$$

$$k=-3 \rightarrow \quad \vee \quad x = -\frac{\pi}{6} - \frac{6\pi}{3} = -\frac{13\pi}{6}$$

$$\therefore \text{P.S.} = \left\{ -\frac{3\pi}{2}, -\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6} \right\}$$

Outra Maneira:

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x + \cos(2x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x + \cos^2 x - \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x + 1 - \sin^2 x - \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2\sin^2 x + \sin x + 1 = 0$$

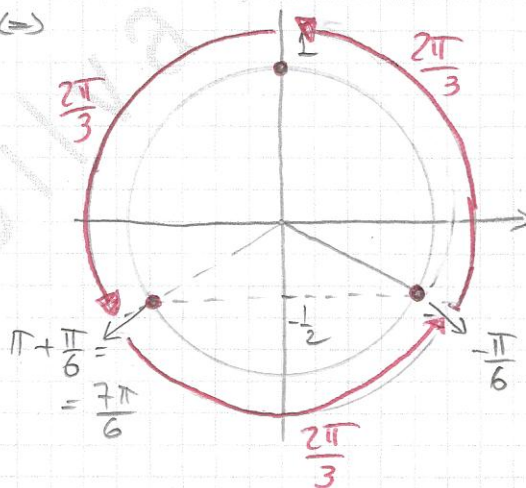
Fazendo $y = \sin x$, vem, $-2y^2 + y + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times (-2) \times 1}}{2 \times (-2)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{2} \vee y = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \vee \sin x = 1$$

$y = \sin x$



$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

Attribuindo valores inteiros a k , conclui-se que:

$$P.S. = \left\{ -\frac{3\pi}{2}, -\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6} \right\}$$

3.3.

• Tem-se $\operatorname{tg}\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = 2 \Leftrightarrow \frac{\operatorname{tg}\theta + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1 - \operatorname{tg}\theta \times \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)} = 2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\operatorname{tg}\theta + 1}{1 - \operatorname{tg}\theta \times 1} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \operatorname{tg}\theta + 1 = \frac{1}{3}(1 - \operatorname{tg}\theta) \Leftrightarrow$$

$$\downarrow$$

$$1 - \operatorname{tg}\theta \neq 0, \forall \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right]$$

$$\Leftrightarrow 3\operatorname{tg}\theta + 3 = 1 - \operatorname{tg}\theta \Leftrightarrow 4\operatorname{tg}\theta = -2 \Leftrightarrow \operatorname{tg}\theta = -\frac{1}{2}$$

Como $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, então $\theta - \pi \in \left]-\frac{3\pi}{2}, -\pi\right]$. Logo,

$$g(\theta - \pi) = \operatorname{sen}(\theta - \pi) + \cos(2(\theta - \pi)) =$$

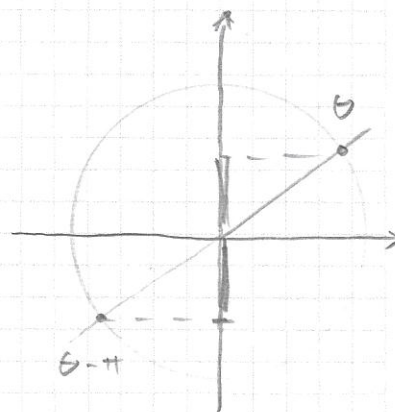
$$= -\operatorname{sen}\theta + \cos(2\theta - 2\pi) =$$

$$= -\operatorname{sen}\theta + \cos(2\theta) =$$

$$= -\operatorname{sen}\theta + \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$$

$$= -2\operatorname{sen}\theta + 1 - \operatorname{sen}^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$$

$$= -2\operatorname{sen}^2\theta - \operatorname{sen}\theta + 1$$



$$\operatorname{sen}(\theta - \pi) = -\operatorname{sen}\theta$$

• Tem-se: $1 + \operatorname{tg}^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} \Leftrightarrow 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2\theta}$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{4} = \frac{1}{\cos^2\theta} \Leftrightarrow \frac{5}{4} = \frac{1}{\cos^2\theta} \Leftrightarrow \cos^2\theta = \frac{4}{5} //$$

$$\text{Logo, } \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta \quad (\Rightarrow)$$

$$(\Rightarrow) \sin^2 \theta = 1 - \frac{4}{5} \quad (\Rightarrow)$$

$$(\Rightarrow) \boxed{\sin^2 \theta = \frac{1}{5}} \quad (\Rightarrow) \sin \theta = -\sqrt{\frac{1}{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

\downarrow
 $\theta \in 4.^\circ Q$

Logo,

$$g(\theta - \pi) = -2\sin^2 \theta - \sin \theta + 1 =$$

$$= -2 \times \frac{1}{5} + \frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{2}{(5)} = \frac{\sqrt{5} + 8}{5} //$$

4.

4.1.

$$h'(x) = 3x^2 - 6x \cdot \frac{\left(\frac{1}{x^2}\right)'}{\frac{1}{x^2}} =$$

$$= 3x^2 - 6x \cdot \frac{-\frac{2}{x^3}}{\frac{1}{x^2}} =$$

$$= 3x^2 - 6x \cdot \frac{-2x^2}{x^3} = 3x^2 + \frac{12}{x}$$

$$h''(x) = 6x - \frac{12}{x^2} = \frac{6x^3 - 12}{x^2}$$

e.A.




$$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{1' \cdot x^2 - 1 \cdot (x^2)'}{(x^2)^2} =$$

$$= \frac{-2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3}$$

$$h''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^3 - 12 = 0 \quad \wedge \quad x^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 = 2 \quad \wedge \quad x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2} \quad \wedge \quad x \neq 0$$

x	$-\infty$	0		$\sqrt[3]{2}$	$+\infty$
$6x^3 - 12$	-	-	-	0	+
x^2	+	0	+	+	+
$h''(x)$	-	nd.	-	0	+
$h(x)$		nd.		P.I.	

O gráfico de h tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, 0[$ e em $]0, \sqrt[3]{2}]$, tem a concavidade voltada para cima em $[\sqrt[3]{2}, +\infty[$ e tem P.I. em $x = \sqrt[3]{2}$.

6.2.

O gráfico de h e a B.O.I. ($y = -x$) intersektam-se pelo menos uma vez no intervalo $]0, 2]$ se a equação $h(x) = -x$ tiver pelo menos uma solução em $]0, 2]$.

Assim, tem-se, $h(x) = -x \Leftrightarrow x^3 - 6 \ln\left(\frac{1}{x^2}\right) + x = 0$

Seja f a função de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definida por

$$f(x) = \underbrace{x^3 - 6 \ln\left(\frac{1}{x^2}\right)}_{h(x)} + x$$

• f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, pois é o quociente, a composição, a soma e a diferença entre funções contínuas no seu domínio. Logo, f é contínua em $]0, 2] \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x^3 - 6 \ln\left(\frac{1}{x^2}\right) + x \right) = \\ &= 0^3 - 6 \times \ln\left(\frac{1}{0^+}\right) + 0 = -6 \ln(+\infty) = \\ &= -6 \times (+\infty) = -\infty \end{aligned}$$

$$f(2) = 2^3 - 6 \ln\left(\frac{1}{2^2}\right) + 2 = 10 - 6 \ln\left(\frac{1}{4}\right) \approx 18,3178$$

Assim, como f é contínua em $]0, 2]$ e como

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ e $f(2)$ têm sinais contrários, pelo conteúdo do Teorema de Bolzano,

$$\exists c \in]0, 2[: f(c) = 0 \Leftrightarrow h(c) + c = 0 \Leftrightarrow h(c) = -c$$

Ou seja, o gráfico de h e a B.O.I. intersectam-se pelo menos uma vez em $]0, 2]$.

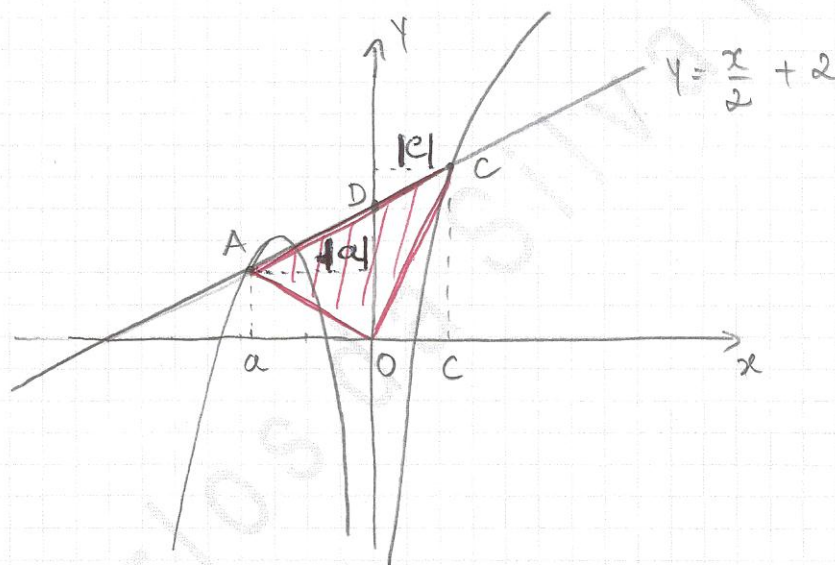
4.3.

Tem-se que:

$$R: 2y - x = 4 \Leftrightarrow 2y = x + 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{x}{2} + 2$$

Utilizando o editor de funções da calculadora, define-se $y_1 = h(x)$ e $y_2 = \frac{x}{2} + 2$ na janela $[-5, 5] \times [-5, 5]$.



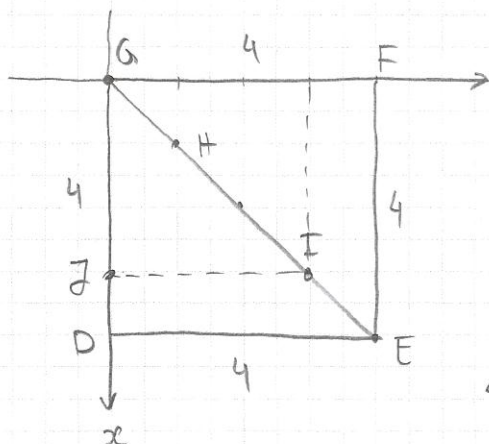
Tem-se que $A(a, b)$, com $a \approx -1,842$ e $b \approx 1,079$ e $C(c, d)$, com $c \approx 1,105$ e $d \approx 2,553$. Além disso $D(0, 2)$. Logo, a área do triângulo $[AOC]$ é dada por:

$$\begin{aligned} A_{[AOC]} &= A_{[AOD]} + A_{[DOC]} = \frac{\overline{OD} \times |a|}{2} + \frac{\overline{OD} \times |c|}{2} = \\ &= \frac{2 \times |-1,842|}{2} + \frac{2 \times |1,105|}{2} = 1,842 + 1,105 = 2,947 \\ &\approx 2,9. \end{aligned}$$

5.

5.1. Tem-se que $A(4,0,0)$, $C(0,4,0)$ e $I(3,3,4)$

PA. "Vista de cima"



$$\overline{GI} = \overline{IE} = \sqrt{2}$$

Tem-se

$$\overline{EG}^2 = 4^2 + 4^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{EG}^2 = 32 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{EG} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$\downarrow$$

$$\overline{EG} > 0$$

Como $\overline{IE} = \sqrt{2}$, então $\overline{GI} = 3\sqrt{2}$ Como $\overline{GI} = \overline{JI}$ (os triângulos $[GDE]$ e $[GJI]$ são semelhantes) vem:

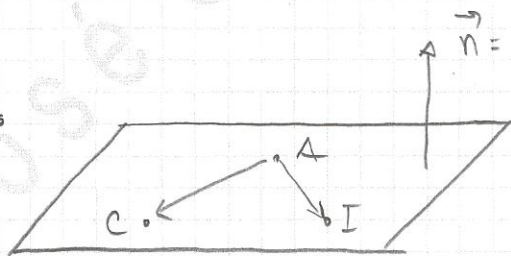
$$\overline{GI}^2 + \overline{JI}^2 = (3\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow \cancel{\overline{GI}^2} = 9 \times 2$$

$$\Leftrightarrow \overline{GI} = \sqrt{9} = 3$$

$$\downarrow$$

$$\overline{GI} > 0$$

$$\therefore I(3, 3, 4)$$



$$\vec{AC} = C - A = (-4, 4, 0)$$

$$\vec{AI} = I - A = (-1, 3, 4)$$

$$\begin{cases} \vec{AC} \cdot \vec{n} = 0 \\ \vec{AI} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-4, 4, 0) \cdot (a, b, c) = 0 \\ (-1, 3, 4) \cdot (a, b, c) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4a + 4b = 0 \\ -a + 3b + 4c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=a \\ -a+3xa+4c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ 2a+4c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ c=-\frac{2a}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=a \\ c=-\frac{a}{2} \end{cases} \quad \text{Logo, } \vec{n} = \left(a, a, -\frac{a}{2}\right), \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Fazendo $a=2$, vem $\vec{n} = (2, 2, -1)$

Ponto b:

$$ACI: 2x + 2y - z = d$$

Como $A(4, 0, 0) \in ACI$, vem:

$$2 \times 4 + 2 \times 0 - 0 = d \Leftrightarrow d=8$$

$$\therefore ACI: 2x + 2y - z = 8$$

5.2.

e.p.: ${}^{10}C_4$

$$\therefore p = \frac{{}^8C_2}{{}^{10}C_4} = \frac{2}{15}$$

e.f.: ${}^8C_2 \times {}^2C_2 = {}^8C_2$

NOTA: Se pedisse a probabilidade de dois serem apenas vértices do cubo e os outros dois do tetraedro o n.º de casos favoráveis seria:

$${}^6C_2 \times {}^4C_2$$

e a probabilidade seria $\frac{{}^6C_2 \times {}^4C_2}{{}^{10}C_4} = \frac{3}{7}$.