Exame Nacional de Matemática A
2015 – 2.ª Fase – Versão 1/2
Proposta de Resolução

Site: http://recursos-para-matematica.webnode.pt/

Facebook: https://www.facebook.com/recursos.para.matematica

Grupo I – Itens de Escolha Múltipla

1. Tem-se que $a+2a+0,4=1 \Leftrightarrow 3a=1-0,4 \Leftrightarrow a=\frac{0,6}{3} \Leftrightarrow 0,2$.

Logo, o valor médio da variável aleatória X é $1\times 0,2+2\times 2\times 0,2+3\times 0,4=2,2$.

Resposta: Versão 1 – B / Versão 2 – C

2. $P\left(A|B\right)$ é a probabilidade de a bola retirada ser de cor preta, sabendo que a bola retirada está numerada com um número par. Logo, o número de casos possíveis é 4 (pode ter sido retirada a bola com o número 2, 4, 6 ou 8). Destas, são de cor preta as bolas numeradas com os números 2 e 4. Portanto, o número de casos favoráveis é 2.

Assim, pela lei de Laplace, $P\left(A|B\right)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

Resposta: Versão 1 – B / Versão 2 – C

3. Tem-se que $\log_b a=\frac{\log_a a}{\log_a b}=\frac{1}{\log_a b}$. Como $\log_b a=\frac{1}{3}$, vem $\frac{1}{\log_a b}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow \log_a b=3$.

Então, $\log_a\left(a^2 b\right)=\log_a\left(a^2\right)+\log_a b=2+3=5$.

Resposta: Versão 1 – D / Versão 2 – A

4. A função f é contínua em $\mathbb{R}$, em particular é contínua em $x=0$. Portanto, $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$.

Tem-se:

- $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(2+e^{x+k}\right)=2+e^{0+k}=2+e^k$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{2x+\ln(x+1)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}} + \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x} = 2+1=3$

- $f(0) = 2+e^{0+k} = 2+e^k$

Logo, $2+e^k = 3 \Leftrightarrow e^k = 1 \Leftrightarrow e^k = e^0 \Leftrightarrow k=0$.

Resposta: Versão 1 – A / Versão 2 – B

5. Tem-se que:

- $f'(x) = \left(3\operatorname{sen}^2 x\right)' = 3\times 2\operatorname{sen} x \times (\operatorname{sen} x)' = 3\times \underbrace{2\operatorname{sen} x \times \cos x}_{\operatorname{sen}(2x)} = 3\operatorname{sen}(2x)$

- $f''(x) = \left(3\operatorname{sen}(2x)\right)' = 3\times (2x)' \cos(2x) = 3\times 2\cos(2x) = 6\cos(2x)$

Resposta: Versão 1 – C / Versão 2 – D

6. O triângulo $[OAB]$ é equilátero e a abcissa do ponto A é 1. Logo, a amplitude do ângulo AOB é $\frac{\pi}{3}$ e $\overline{OB} = \overline{OA} = 1$.

Assim, $|z| = \overline{OB} = 1$ e como a imagem geométrica de z pertence ao 4.º quadrante, um seu argumento pode ser $-\frac{\pi}{3}$.

Logo, $z = 1\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi\right) = \operatorname{cis}\frac{5\pi}{3}$.

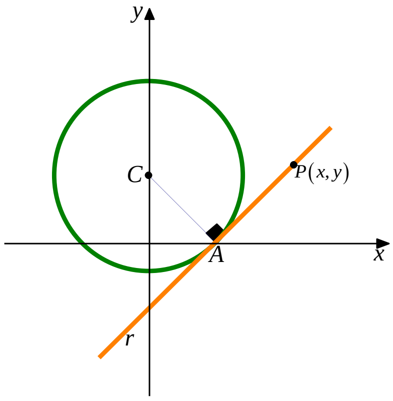
Resposta: Versão 1 – D / Versão 2 – C

7. As coordenadas dos pontos de intersecção da circunferência com o eixo Ox são da forma $(x,0)$. Fazendo $y=0$ na equação da circunferência, vem:

$$x^2 + (0-1)^2 = 2 \Leftrightarrow x^2+1=2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1} \Leftrightarrow x=-1 \quad \vee \quad x=1$$

Como a abcissa de A é positiva, vem $A(1,0)$.

Portanto, a circunferência contém o ponto $A(1,0)$ e o seu centro é o ponto C, de coordenadas $(0,1)$. Representando a circunferência e a recta r num referencial o.n. xOy:



A recta r é tangente à circunferência no ponto A, portanto é perpendicular ao segmento de recta $[AC]$. Assim, sendo $P(x,y)$ um ponto da recta r, a sua equação é dada por:

$$r:\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow(x-1,y-0)\cdot(0-1,1-0)=0\Leftrightarrow(x-1,y)\cdot(-1,1)=0\Leftrightarrow -x+1+y=0\Leftrightarrow y=x-1$$

Outra resolução:

A recta r é perpendicular à recta AC $\Rightarrow m_r=-\frac{1}{m_{AC}}$. Como $\overrightarrow{AC}=(-1,1)$, vem $m_{AC}=\frac{1}{-1}=-1$ e portanto $m_r=-\frac{1}{-1}=1$. Logo, a equação reduzida da recta r é do tipo $y=x+b$. As coordenadas do ponto A são $(1,0)$. Como $A\in r$ vem, $0=1\times1+b\Leftrightarrow b=-1$. Então, $r: y=x-1$

Resposta: Versão 1 – B / Versão 2 – D

8. Das opções apresentadas, a única sucessão que é monótona e limitada é a de termo geral $u_n=-\frac{1}{n}$:

- $u_{n+1}-u_n=-\frac{1}{n+1}-\left(-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{\cancel{n}+1-\cancel{n}}{n(n+1)}=\frac{1}{\underbrace{n(n+1)}_{>0,\ \forall n\in\mathbb{N}}}>0,\ \forall n\in\mathbb{N}$. Logo, a sucessão de termo geral $u_n=-\frac{1}{n}$ é monótona crescente.

- Tem-se que para todo o $n\in\mathbb{N}$, $0<\frac{1}{n}\leq1\Leftrightarrow-1\leq-\frac{1}{n}<0$. Logo, a sucessão de termo geral $u_n=-\frac{1}{n}$ é limitada.

Resposta: Versão 1 – C / Versão 2 – B

Grupo II – Itens de Resposta Aberta

1. Tem-se, $z_1=\dfrac{-1+i}{\sqrt{2}\operatorname{cis}\dfrac{\pi}{12}}\overset{\text{i)}}{=}\dfrac{\cancel{\sqrt{2}}\operatorname{cis}\dfrac{3\pi}{4}}{\sqrt{2}\operatorname{cis}\dfrac{\pi}{12}}=\operatorname{cis}\left(\dfrac{3\pi}{4}-\dfrac{\pi}{12}\right)=\operatorname{cis}\dfrac{8\pi}{12}=\operatorname{cis}\dfrac{2\pi}{3}$.

Assim, $z^4=\overline{z_1}\Leftrightarrow z^4=\operatorname{cis}\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)\Leftrightarrow z=\sqrt[4]{\operatorname{cis}\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)}\Leftrightarrow z=\sqrt[4]{1}\operatorname{cis}\left(\dfrac{-\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi}{4}\right),\ k\in\{0,1,2,3\}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow z=\operatorname{cis}\left(-\dfrac{\dfrac{2\pi}{3}}{4}+\dfrac{2k\pi}{4}\right),\ k\in\{0,1,2,3\}\Leftrightarrow z=\operatorname{cis}\left(-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{2}\right),\ k\in\{0,1,2,3\}$$

Logo:

- se $k=0\rightarrow z=\operatorname{cis}\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$
- se $k=1\rightarrow z=\operatorname{cis}\left(-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{2}\right)=\operatorname{cis}\dfrac{2\pi}{6}=\operatorname{cis}\dfrac{\pi}{3}$
- se $k=2\rightarrow z=\operatorname{cis}\left(-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2\pi}{2}\right)=\operatorname{cis}\dfrac{5\pi}{6}$
- se $k=3\rightarrow z=\operatorname{cis}\left(-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{3\pi}{2}\right)=\operatorname{cis}\dfrac{8\pi}{6}=\operatorname{cis}\dfrac{4\pi}{3}$

O conjunto solução da equação é $\left\{\operatorname{cis}\left(-\dfrac{\pi}{6}\right),\operatorname{cis}\dfrac{\pi}{3},\operatorname{cis}\dfrac{5\pi}{6},\operatorname{cis}\dfrac{4\pi}{3}\right\}$

i) Para escrever $-1+i$ na forma trigonométrica, vem: $|-1+i|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$. Sendo θ um argumento de $-1+i$, tem-se $\operatorname{tg}\theta=\dfrac{1}{-1}=-1$ e $\theta\in 2.^{\text{o}}$ quadrante, pelo que $\theta=-\dfrac{\pi}{4}+\pi=\dfrac{3\pi}{4}$. Assim $-1+i=\sqrt{2}\operatorname{cis}\dfrac{3\pi}{4}$.

2.

2.1. No instante inicial, $t=0$, o ponto P coincide com o ponto A. Tem-se:

$$d(0)=1+\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\pi\times 0+\frac{\pi}{6}\right)=1+\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)=1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$$

Pretende-se determinar os instantes em que nos primeiros três segundos do movimento, o ponto P passou pelo ponto A. Esses instantes são as soluções da condição $d(t)=d(0) \quad \wedge \quad t\in\left]0,3\right]$.

Assim, para $t\in\left]0,3\right]$, vem:

$$d(t)=d(0)\Leftrightarrow 1+\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\pi t+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{5}{4}\Leftrightarrow\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\pi t+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\operatorname{sen}\left(\pi t+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$\underset{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}}{\Leftrightarrow}\pi t+\cancel{\frac{\pi}{6}}=\cancel{\frac{\pi}{6}}+2k\pi \quad \vee \quad \pi t+\frac{\pi}{6}=\pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\cancel{\pi}t=2k\cancel{\pi} \quad \vee \quad \pi t=\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{6}+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t=2k \quad \vee \quad \cancel{\pi}t=\frac{2\cancel{\pi}}{3}+2k\cancel{\pi}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow t=2k \quad \vee \quad t=\frac{2}{3}+2k\ ,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Logo, nos primeiros três segundos do movimento, os instantes, diferentes do inicial, em que o ponto P passou pelo ponto A foram $t=\frac{2}{3}$ ($k=0$, segunda equação), $t=2$ ($k=1$, primeira equação) e $t=\frac{8}{3}$ ($k=1$, segunda equação).

2.2. A função d é contínua em $\left[0,+\infty\right[$ pois é a soma, o produto e a composição entre funções contínuas no seu domínio: $y=1$ e $y=\frac{1}{2}$ são funções constantes e portanto contínuas no seu domínio; $y=\operatorname{sen}t$ é uma função trigonométrica, contínua no seu domínio; $y=\pi t+\frac{\pi}{6}$ é uma função afim, contínua no seu domínio. Logo, d é contínua em $\left[3,4\right]\subset\left[0,+\infty\right[$.

- $d(3)=1+\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(3\pi+\frac{\pi}{6}\right)=1+\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=1+\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{6}\right)=1+\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}=0,75$

- $d(4)=1+\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(4\pi+\frac{\pi}{6}\right)=1+\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)=1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}=1,25$

Como d é contínua em $[3,4]$ e como $d(3)<1,1<d(4)$, pelo teorema de Bolzano existe pelo menos um $t_0\in]3,4[$ tal que $d(t)=1,1$, ou seja, existe pelo menos um instante entre os três e quatro segundos após o instante inicial em que o ponto P esteve à distância de $1,1$ metros do ponto O.

3.

3.1.

- Quando $x\to-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(1+xe^x\right)=1+\lim_{x\to-\infty}\left(xe^x\right)\underset{i)}{=}1+\lim_{y\to+\infty}\left(-ye^{-y}\right)\underset{ii)}{=}1-\lim_{y\to+\infty}\frac{y}{e^y}=1-0=1$$

Logo, a recta de equação $y=1$ é assimptota horizontal do gráfico de f, quando $x\to-\infty$.

i) Mudança de variável: se $x\to-\infty$ então $-x\to+\infty$. Seja $y=-x\Leftrightarrow x=-y$, $y\to+\infty$.

ii) Se $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^p}=+\infty$ então $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^p}{e^x}=0$, $p\in\mathbb{R}$ (limite notável).

- Quando $x\to+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln(x-3)-\ln x\right)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x-3}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x}{x}-\frac{3}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1-\frac{3}{x}\right)=\ln\left(1-\frac{3}{+\infty}\right)=$$

$$=\ln(1-0)=\ln(1)=0$$

Logo, a recta de equação $y=0$ é assimptota horizontal do gráfico de f, quando $x\to+\infty$.

3.2. Para $x\in]-\infty,3]$, tem-se $f(x)=1+xe^x$. Assim:

$$f(x)-2x>1\Leftrightarrow \cancel{1}+xe^x-2x>\cancel{1}\Leftrightarrow x\left(e^x-2\right)>0$$

Determinando os zeros de $x\left(e^x-2\right)$, vem:

$$x\left(e^x-2\right)=0\Leftrightarrow x=0 \quad\vee\quad e^x-2=0\Leftrightarrow x=0 \quad\vee\quad e^x=2\Leftrightarrow x=0 \quad\vee\quad x=\ln 2$$

Fazendo um quadro de sinal, vem:

x		0		$\ln 2$		3
x	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
e^x-2	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$x\left(e^x-2\right)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$

Logo, o conjunto solução da equação $f(x)-2x>1 \Leftrightarrow x\left(e^x-2\right)>0$ é $]-\infty,0[\,\cup\,]\ln 2,3]$.

3.3. Seja t a recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 4. Então, $m_t=f'(4)$ e o ponto de coordenadas $(4, f(4))$ é o ponto de tangência.

Para $t\in\,]3,+\infty[$, $f(x)=\ln(x-3)-\ln x$ e portanto, $f(4)=\ln(4-3)-\ln 4=\ln 1-\ln 4=-\ln 4$

$f'(x)=\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x}$ e portanto, $f'(4)=\dfrac{1}{4-3}-\dfrac{1}{4}=1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$

Logo, equação reduzida da recta t é do tipo $y=\dfrac{3}{4}x+b$. Como o ponto de coordenadas $(4,-\ln 4)$ pertence à recta t, substituindo-o na sua equação reduzida vem: $-\ln 4=\dfrac{3}{4}\times 4+b \Leftrightarrow b=-3-\ln 4$.

Logo, $t: y=\dfrac{3x}{4}-3-\ln 4$

4. O gráfico da opção **A** não pode ser o da função f. A função f tem derivada finita em todos os pontos do seu domínio e portanto é contínua no seu domínio, o que não se verifica com a função cujo gráfico está representado nesta opção.

Como $f''(x)<0$ para qualquer $x\in\,]-\infty,0[$, o gráfico da função f tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty,0[$. Logo, o gráfico da opção **B** não pode ser o da função f, pois este não tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $]-\infty,0[$.

Por fim, como $f'(0)>0$, a recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa zero tem declive positivo. Logo, o gráfico da opção **C** não pode ser o da função f, visto que a recta tangente ao gráfico da função representada por este gráfico, no ponto de abcissa zero, tem declive negativo.

Portanto, em nenhuma das opções pode estar representado o gráfico de f.

Outra justificação para excluir o gráfico da opção C:

Como $f'(0)>0$, existe uma vizinhança do ponto zero onde f é estritamente crescente. Logo, o gráfico da opção **C** não pode ser o da função f, pois não existe uma vizinhança do ponto zero onde a função representada por este gráfico seja estritamente crescente.

5. Tem-se, $P\left(A\cup\bar{B}\right)-1+P(B)=P(A)+P\left(\bar{B}\right)-\underbrace{P\left(A\cap\bar{B}\right)}_{P(A)-P(A\cap B)}-1+P(B)=$

$$=P(A)+\cancel{1}-\cancel{P(B)}-\left(P(A)-P(A\cap B)\right)-\cancel{1}+\cancel{P(B)}=$$

$$=\cancel{P(A)}-\cancel{P(A)}+P(A\cap B)\underset{i)}{=}P(A)\times P\left(B|A\right)$$

i) $P\left(B|A\right)=\dfrac{P(B\cap A)}{P(A)}\Leftrightarrow P(B\cap A)=P(A)\times P\left(B|A\right)$

6.

6.1. Como o ponto R tem coordenadas $(2,2,2)$ e como a pirâmide é quadrangular regular, a abcissa e a ordenada do ponto V são iguais e iguais 1. Logo, as suas coordenadas são da forma $V(1,1,z)$.

O ponto V pertence ao plano $PQV: 6x+z-12=0$. Assim, substituindo as coordenadas de V na equação do plano PQV vem, $6\times1+z-12=0\Leftrightarrow z=12-6\Leftrightarrow z=6$.

$\therefore\ V(1,1,6)$

6.2. Seja α o plano perpendicular a OR que contém o ponto P, cujas coordenadas são $P(2,0,0)$.

Um vector director da recta OR é $\overrightarrow{OR}=R-O=(2,2,2)-(0,0,0)=(2,2,2)$. Logo, como α é perpendicular à recta OR, um vector normal de α é $\vec{n}_\alpha=\overrightarrow{OR}=(2,2,2)$.

Assim, $\alpha: 2x+2y+2z=d$. Como α contém o ponto $P(2,0,0)$ vem, $2\times2+2\times0+2\times0=d\Leftrightarrow d=4$.

Logo, $\alpha: 2x+2y+2z=4\Leftrightarrow x+y+z=2$.

6.3. Tem-se que:

- uma equação do plano QRS é $y=2$.

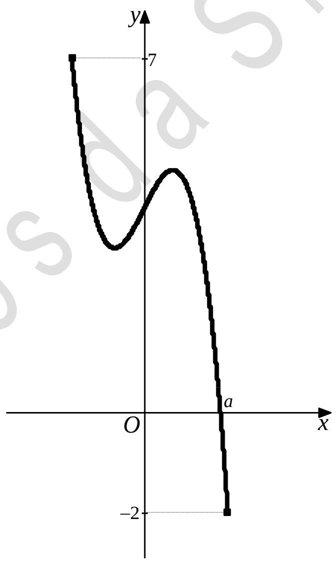
- seja x a abcissa do ponto A. Como A pertence ao plano QRS e como a sua cota é o triplo da sua abcissa, as suas coordenadas são da forma $A\left(x,2,x^3\right)$.

- $\overrightarrow{OA}=A-O=\left(x,2,x^3\right)-\left(0,0,0\right)=\left(x,2,x^3\right)$ e $\overrightarrow{TQ}=Q-T=\left(2,2,0\right)-\left(0,0,2\right)=\left(2,2,-2\right)$

Como os vectores $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{TQ}$ são perpendiculares, tem-se $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{TQ}=0$. Portanto, pretende-se determinar x tal que:

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{TQ}=0\Leftrightarrow\left(x,2,x^3\right)\cdot\left(2,2,-2\right)=0\Leftrightarrow 2x+4-2x^3=0\Leftrightarrow -2x^3+2x+4=0$$

- Utilizando o editor de funções da calculadora, define-se $y=-2x^3+2x+4$ na janela $\left[-4,4\right]\times\left[-2,7\right]$:



Logo, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{TQ}=0\Leftrightarrow -2x^3+2x+4=0\Leftrightarrow x=a$, com $a\approx 1{,}52$.

6.4. O número de casos possíveis é 7^9, pois cada uma das nove faces pode ser colorida com qualquer uma das sete cores, podendo faces distintas serem coloridas com a mesma cor.

O número de casos favoráveis é ${}^4C_2 \times {}^5C_2 \times 5!$. Das quatro faces triangulares escolhem-se duas para colorir de branco, o número de maneiras de o fazer é ${}^4C_2$. Para cada uma destas maneiras, existem ${}^5C_2$ de maneiras distintas de colorir duas das cinco faces quadrangulares. Finalmente, as restantes cinco faces são coloridas com cinco cores distintas. O número de maneiras de o fazer é $5!$.

Logo, pela lei de Laplace, a probabilidade pedida é $\dfrac{{}^4C_2 \times {}^5C_2 \times 5!}{7^9} \approx 0,0002$.