

Prova final de MATEMÁTICA - 3º ciclo
2016 - 1ª Fase

Proposta de resolução

Caderno 1

1. Como a função representada graficamente é uma função de proporcionalidade inversa, a sua expressão algébrica é da forma

$$y = \frac{k}{x}, k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Assim, substituindo as coordenadas do ponto P (que pertence ao gráfico da função), podemos calcular o valor de k :

$$21 = \frac{k}{5} \Leftrightarrow 21 \times 5 = k \Leftrightarrow 105 = k$$

Ou seja, $y = \frac{105}{x}$, e assim, calculando as imagens dos objetos 17, 19, 31 e 35, temos:

- $y = \frac{105}{17}$ e como $\frac{105}{17} \neq 9$, então o ponto de coordenadas $(17, 9)$ não pertence ao gráfico da função, logo não é o ponto Q
- $y = \frac{105}{19}$ e como $\frac{105}{19} \neq 7$, então o ponto de coordenadas $(19, 7)$ não pertence ao gráfico da função, logo não é o ponto Q
- $y = \frac{105}{33}$ e como $\frac{105}{33} \neq 5$, então o ponto de coordenadas $(33, 5)$ não pertence ao gráfico da função, logo não é o ponto Q
- $y = \frac{105}{35}$ e como $\frac{105}{35} = 3$, então o ponto de coordenadas $(35, 3)$ pertence ao gráfico da função, logo pode ser o ponto Q

Resposta: **Opção D**

2. Escrevendo 1 milhão em notação científica, temos:

$$1\,000\,000 = 1 \times 10^6$$

Pelo que, 1700 milhões, em notação científica, é:

$$1700 \times 1 \times 10^6 = 1,7 \times 10^3 \times 1 \times 10^6 = 1,7 \times 10^3 \times 10^6 = 1,7 \times 10^{3+6} = 1,7 \times 10^9$$

Determinando 45% deste valor, em euros, e escrevendo o resultado em notação científica, vem que:

$$1,7 \times 10^9 \times \frac{45}{100} = 1,7 \times 10^9 \times 0,45 = 0,765 \times 10^9 = 7,65 \times 10^{-1} \times 10^9 = 7,65 \times 10^{-1+9} = 7,65 \times 10^8 \text{ euros}$$



3. Como os triângulos $[ABO]$ e $[CDO]$ são semelhantes (porque têm um ângulo comum e os lados opostos a este ângulo - os lados $[AB]$ e $[CD]$ são paralelos).

Assim, a razão entre lados correspondentes é igual, ou seja:

$$\frac{\overline{OD}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OA}}$$

Temos ainda que:

$$\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AC} = 8 + 4,5 = 12,5 \text{ cm}$$

Desta forma, substituindo os valores conhecidos, vem que:

$$\frac{\overline{OD}}{9,6} = \frac{12,5}{8} \Leftrightarrow \overline{OD} = \frac{12,5 \times 9,6}{8} \Leftrightarrow \overline{OD} = 15 \text{ cm}$$

Como $\overline{OD} = \overline{OB} + \overline{BD} \Leftrightarrow \overline{BD} = \overline{OD} - \overline{OB}$, calculando o valor de \overline{BD} , em centímetros, vem:

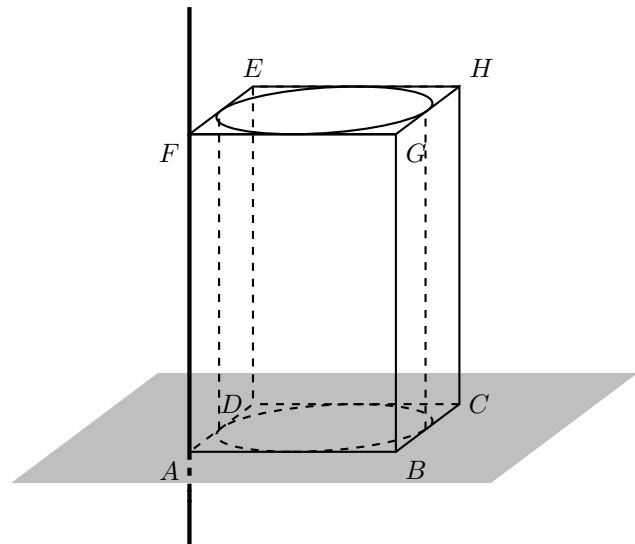
$$\overline{BD} = \overline{OD} - \overline{OB} = 15 - 9,6 = 5,4 \text{ cm}$$

4.

- 4.1. Como as arestas laterais de um prisma são perpendiculares às bases do prisma, também o são relativamente ao plano que contém uma das bases do prisma.

Assim, uma reta perpendicular ao plano ABC , é, por exemplo:

a reta AF



- 4.2. Como \overline{CH} é a medida da altura do cilindro e também do prisma, podemos determinar expressões do volume do prisma (V_P) e do volume do cilindro (V_C), em função de \overline{CH} :

- $V_P = A_{\text{Base}} \times \text{altura} = \overline{AB}^2 \times \overline{CH} = 20^2 \times \overline{CH} = 400\overline{CH}$
- $V_C = A_{\text{Base}} \times \text{altura} = \pi r^2 \times \overline{CH} = \pi \times \left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2 \times \overline{CH} = \pi \times \left(\frac{20}{2}\right)^2 \times \overline{CH} = 100\pi\overline{CH}$

Com a diferença dos volumes, é de 3000 cm^3 , vem que:

$$V_P - V_C = 3000 \Leftrightarrow 400\overline{CH} - 100\pi\overline{CH} = 3000 \Leftrightarrow \overline{CH}(400 - 100\pi) = 3000 \Leftrightarrow \overline{CH} = \frac{3000}{400 - 100\pi}$$

Assim, o valor de \overline{CH} , em centímetros, arredondado às unidades, é $\overline{CH} \approx 35 \text{ cm}$



5. O triângulo $[CMT]$ é retângulo em C . Como, relativamente ao ângulo CMT , o lado $[MC]$ é o cateto adjacente e o lado $[TC]$ é o cateto oposto, usando a definição de tangente, temos:

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\overline{TC}}{\overline{MC}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\overline{TC}}{25,6} \Leftrightarrow 25,6 \times \operatorname{tg} 60^\circ = \overline{TC}$$

Como $\operatorname{tg} 60^\circ \approx 1,73$, vem que:

$$\overline{TC} \approx 25,6 \times 1,73 \approx 44,29$$

O triângulo $[CRT]$ é retângulo em C . Como, relativamente ao ângulo CRT , o lado $[CR]$ é o cateto adjacente e o lado $[TC]$ é o cateto oposto, voltando a usar a definição de tangente, temos:

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{\overline{TC}}{\overline{CR}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} 45^\circ = \frac{44,29}{\overline{CR}} \Leftrightarrow \overline{CR} = \frac{44,29}{\operatorname{tg} 45^\circ}$$

Como $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$, vem que:

$$\overline{CR} \approx \frac{44,29}{1} \approx 44,29$$

Assim, determinando o valor de \overline{MR} , em metros, e arredondando o resultado às unidades, vem que:

$$\overline{MR} = \overline{MC} + \overline{CR} \approx 25,6 + 44,29 \approx 70 \text{ m}$$

6. Para que o intervalo $A = [1, \sqrt{n}[$ tenha 28 números naturais, $\sqrt{n} > 28$, porque como o intervalo é aberto à direita, $\sqrt{n} \notin A$

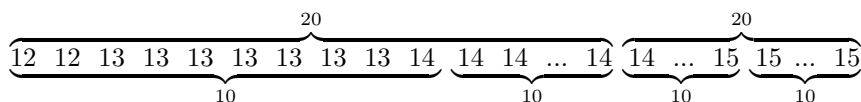
Assim, como $28^2 = 784$, temos que o menor número natural que verifica a condição $\sqrt{n} > 28$ é:

$$n = 28^2 + 1 = 784 + 1 = 785$$

Caderno 2

7. Como a escola tem $2 + 7 + 20 + 11 = 40$ alunos, dividindo a lista ordenada em duas listas com 20 alunos cada, podemos determinar o 1º quartil, identificando a mediana do primeiro conjunto. Assim, a mediana corresponde à média das idades correspondentes às posições 10 e 11 da lista ordenada.

Como 9 alunos têm 13 anos ou menos, e são 20 os alunos com 14 anos, as posições 10 e 11 da lista ordenada das idades são ambas 14 anos, pelo que, o primeiro quartil deste conjunto de dados é 14 anos.



Resposta: **Opção C**

8.

- 8.1. A Beatriz só vence a jogada se o seu dado tiver um número maior que o número do dado do António. Como só existe no dado uma face com um número superior a 5, e podem sair seis números, então o valor da probabilidade da Beatriz vencer a jogada, escrito na forma de fração, é:

$$p = \frac{1}{6}$$



- 8.2. Organizando numa tabela todos os conjuntos de lançamentos dos dois dados, e assinalando as situações em que o António é vencedor (A), em que é declarado empate, e em que a Beatriz vence (B), temos:

<div style="display: flex; justify-content: space-between; align-items: center;"> António \ Beatriz </div>	1	2	3	4	5	6
1	Empate	B	B	B	B	B
2	A	Empate	B	B	B	B
3	A	A	Empate	B	B	B
4	A	A	A	Empate	B	B
5	A	A	A	A	Empate	B
6	A	A	A	A	A	Empate

Assim, é possível verificar que, de entre as 36 configurações possíveis de obter no lançamento dos 2 dados (ou seja 36 casos possíveis), em 15 delas o António tem um número maior (ou seja 15 casos favoráveis).

Assim, recorrendo à Regra de Laplace, calculando a probabilidade de que o António vença a nova jogada, e tornando a fração irredutível, é:

$$p = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

9. Simplificando cada uma das desigualdades, temos que:

- $2q > 2r \Leftrightarrow \frac{2q}{2} > \frac{2r}{2} \Leftrightarrow q > r$
- $-2q > -2r \Leftrightarrow (-1) \times (-2q) < (-1) \times (-2r) \Leftrightarrow 2q < 2r \Leftrightarrow \frac{2q}{2} < \frac{2r}{2} \Leftrightarrow q < r$
- $q + 2 > r + 2 \Leftrightarrow q + 2 - 2 > r + 2 - 2 \Leftrightarrow q > r$
- $q - 2 > r - 2 \Leftrightarrow q - 2 + 2 > r - 2 + 2 \Leftrightarrow q > r$

Assim, se $q < r$. então a afirmação $-2q > -2r$ é verdadeira.

Resposta: **Opção B**

10. Observando a regularidade das somas apresentadas, podemos verificar que a soma dos primeiros n números ímpares é n^2

Assim, a soma dos primeiros 80 números ímpares é:

$$\underbrace{1 + 3 + 5 + \dots + 159}_{80} = 80^2 = 6400$$



11. Como a função f é uma função afim, a sua expressão algébrica é da forma $f(x) = mx + b$

Como o gráfico de f interseca o eixo das ordenadas no ponto de coordenadas $(0, -1)$, temos que $b = -1$

Como o ponto de coordenadas $(5, 1)$ pertence ao gráfico de f , temos que $f(5) = 1$, e assim, substituindo os valores conhecidos na expressão algébrica, incluindo o valor de b , podemos determinar o valor de m :

$$1 = m \times 5 - 1 \Leftrightarrow 1 + 1 = m \times 5 \Leftrightarrow \frac{2}{5} = m$$

Desta forma, uma expressão algébrica da função f é:

$$f(x) = \frac{2}{5}x + (-1) \Leftrightarrow f(x) = \frac{2}{5}x - 1$$

12. Observando que 40 é um número par e por isso $(-1)^{40} = 1$, escrevendo 4 na forma de uma potência de base 2 e usando as regras operatórias de potências, temos que:

$$\frac{8^{30}}{2^{30}} \times (-1)^{40} = \left(\frac{8}{2}\right)^{30} \times 1 = 4^{30} = 2^{2 \times 30} = 2^{2 \times 30} = 2^{60}$$

13. Como h é o número de homens e m é o número de mulheres, a afirmação «o número de homens é igual a um quarto do número de mulheres» pode ser traduzida por $h = \frac{1}{4}m$

Se a empresa contratar mais 2 homens, o número de homens passará a ser $h + 2$ e se a empresa contratar mais 3 mulheres, o número de mulheres passará a ser $m + 3$.

Como, nestas condições, o número de homens passará a ser igual a um terço do número de mulheres, então $h + 2 = \frac{1}{3}(m + 3)$

Assim, um sistema de equações que permita determinar o número de homens e o número de mulheres, pode ser:

$$\begin{cases} h = \frac{1}{4}m \\ h + 2 = \frac{1}{3}(m + 3) \end{cases}$$

14. Aplicando a propriedade distributiva, escrevendo a equação na fórmula canónica e usando a fórmula resolvente, vem:

$$x^2 + 3(x - 2) = x - 3 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 6 = x - 3 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 6 - x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(a = 1, b = 2 \text{ e } c = -3)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(-3)}}{2(1)} \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 + 4}{2} \vee x = \frac{-2 - 4}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2}{2} \vee x = \frac{-6}{2} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -3$$

$$\text{C.S.} = \{-3, 1\}$$



15. Resolvendo a inequação, temos:

$$\frac{x-1}{6} \leq \frac{5x-1}{3} \Leftrightarrow \frac{x-1}{6} \leq \frac{5x-1}{3} \quad (2) \Leftrightarrow \frac{x-1}{6} \leq \frac{10x-2}{6} \Leftrightarrow x-1 \leq 10x-2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x-10x \leq -2+1 \Leftrightarrow -9x \leq -1 \Leftrightarrow 9x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{9}$$

$$\text{C.S.} = \left[\frac{1}{9}, +\infty \right[$$

16. Como $\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB} = a + b$, temos que a área do quadrado de lado \overline{OB} é:

$$A = \overline{OB}^2 = (a+b)^2 = a^2 + 2 \times a \times b + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Resposta: **Opção A**

17.

17.1. Como a reta MN é tangente à circunferência no ponto P , o raio $[OP]$ é perpendicular à reta MN

Desta forma, o triângulo $[OPM]$ é retângulo em P , ou seja $\widehat{OPM} = 90^\circ$, e assim, como $\widehat{OMN} = \widehat{OMP} = 15^\circ$, temos que:

$$\widehat{MOP} + \widehat{OMP} + \widehat{OPM} = 180 \Leftrightarrow \widehat{MOP} + 15 + 90 = 180 - 90 - 15 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \widehat{MOP} = 180 - 90 - 15 \Leftrightarrow \widehat{MOP} = 75^\circ$$

Como o ângulo MOP é o ângulo ao centro relativo ao arco QP , a amplitude do arco é igual à amplitude do ângulo:

$$\widehat{QP} = 75^\circ$$

Resposta: **Opção B**

17.2. O triângulo $[OPN]$ é retângulo em P (porque o raio $[OP]$ da circunferência é perpendicular à reta tangente em P , que contém o lado $[PN]$ do triângulo).

Assim, recorrendo ao Teorema de Pitágoras, temos que:

$$\overline{ON}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{PN}^2 \Leftrightarrow \overline{ON}^2 = (\sqrt{3})^2 + 3^2 \Leftrightarrow \overline{ON}^2 = 3 + 9 \Leftrightarrow \overline{ON}^2 = 12 \xrightarrow{\overline{ON} > 0} \overline{ON} = \sqrt{12}$$

17.3. Como o ponto O é a interseção de duas bissetrizes de ângulos do triângulo $[LMN]$, então o ponto O é Incentro do triângulo.

Resposta: **Opção C**

