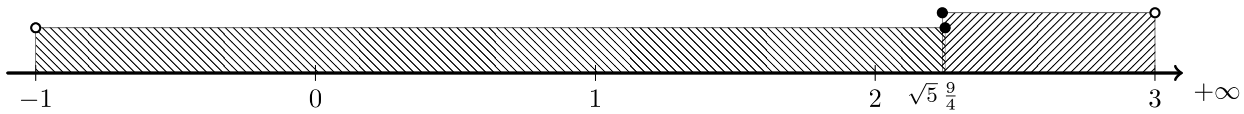
Prova final de MATEMÁTICA - 3º ciclo
2017 - 1ª Fase

Proposta de resolução

Caderno 1

1. Como $\frac{9}{4} = 2{,}25$ e $\sqrt{5} \approx 2{,}24$, temos que $\sqrt{5} < \frac{9}{4}$ e assim, representando na reta real os dois intervalos indicados na definição do conjunto, vem que:



Assim temos que $\left]-1,\frac{9}{4}\right] \cap \left[\sqrt{5},3\right] = \left[\sqrt{5},\frac{9}{4}\right]$

Resposta: **Opção C**

2. Como a resolução máxima do olho humano é $0{,}1 = 1 \times 10^{-1}$ mm e a resolução máxima do referido microscópio eletrónico é $0{,}000\,004 = 4 \times 10^{-6}$, então o quociente entre a resolução máxima do olho humano e a resolução máxima do referido microscópio eletrónico, em notação científica é:

$$\frac{0{,}1}{0{,}000\,004} = \frac{1 \times 10^{-1}}{4 \times 10^{-6}} = \frac{1}{4} \times \frac{10^{-1}}{10^{-6}} = 0{,}25 \times 10^{-1-(-6)} = 0{,}25 \times 10^{-1+6} =$$

$$= 2{,}5 \times 10^{-1} \times 10^{5} = 2{,}5 \times 10^{-1+5} = 2{,}5 \times 10^{4}$$

3. Escrevendo os dados apresentados numa lista ordenada, temos:

$$\underbrace{23 \quad 25 \quad 31 \quad 32}_{50\%} \; \underbrace{32 \quad 44 \quad 45 \quad 56}_{50\%}$$

Pelo que a mediana deste conjunto de dados é $\tilde{x} = 32$, e a média é:

$$\overline{x} = \frac{23+25+31+32+32+44+45+56}{8} = \frac{288}{8} = 36$$

Resposta: **Opção B**

4. O triângulo $[CDE]$ é retângulo em E. Como, relativamente ao ângulo DCE, o lado $[CE]$ é o cateto adjacente e o lado $[CD]$ é a hipotenusa, usando a definição de cosseno, temos:

$$\cos 10^\circ = \frac{\overline{CE}}{\overline{CD}} \Leftrightarrow \cos 10^\circ = \frac{\overline{CE}}{4{,}1} \Leftrightarrow \overline{CE} = 4{,}1 \times \cos 10^\circ$$

Como $\cos 10^\circ \approx 0{,}985$, vem que:

$$\overline{CE} \approx 4{,}1 \times 0{,}985 \approx 4{,}039 \text{ m}$$

Assim, como a distância (d) da reta t ao ponto C é 20 centímetros, ou seja, 0,2 metros e como $\overline{AB} = \overline{CE} + d$, vem que a distância do candeeiro ao tabuleiro da ponte, em metros, arredondado às décimas, é:

$$\overline{AB} \approx 4{,}039 + 0{,}2 \approx 4{,}2 \text{ m}$$

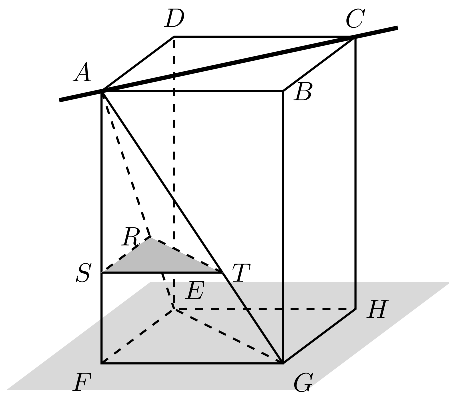
5.

5.1. Como as bases de um prisma são paralelas entre si, qualquer reta contida no plano que contém a base superior do prisma $[ABCD]$ é paralela ao plano que contém a base inferior do prisma $[FGHE]$.

Assim, uma reta paralela ao plano EFG, é, por exemplo:

a reta AC

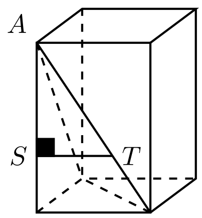
(Qualquer reta contida no plano RST também é paralela ao plano EFG).



5.2.

5.2.1. Como o plano STR é paralelo ao plano EFG, e o plano EFG é perpendicular ao plano AFG, então também o plano STR é perpendicular ao plano AFG, ou seja, o ângulo AST é reto, pelo que o triângulo $[AST]$ é um triângulo retângulo em S, pelo que podemos, recorrendo ao Teorema de Pitágoras, afirmar que:

$$\overline{AT}^2 = \overline{AS}^2 + \overline{ST}^2$$



Logo, substituindo os valores dados, vem que:

$$\overline{AT}^2 = 6^2 + 4^2 \Leftrightarrow \overline{AT}^2 = 36 + 16 \Leftrightarrow \overline{AT}^2 = 52 \underset{\overline{AT}>0}{\Rightarrow} \overline{AT} = \sqrt{52}$$

E assim, arredondando o valor pedido às décimas, temos que $\overline{AT} \approx 7{,}2$ cm

5.2.2. Os triângulos $[AST]$ e $[AFG]$ são semelhantes (porque têm um ângulo comum e os lados opostos a este ângulo - os lados $[ST]$ e $[FG]$ são paralelos), a razão entre lados correspondentes é igual, ou seja:

$$\frac{\overline{FG}}{\overline{ST}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AS}}$$

Desta forma, substituindo os valores conhecidos, vem que:

$$\frac{\overline{FG}}{4} = \frac{9}{6} \Leftrightarrow \overline{FG} = \frac{4 \times 9}{6} \Leftrightarrow \overline{FG} = \frac{36}{6} \Leftrightarrow \overline{FG} = 6 \text{ cm}$$

Desta forma, como $[FGHE]$ é um quadrado, temos que $\overline{EF} = \overline{FG} = 6$ e a área da base da pirâmide, ou seja, a área do triângulo $[EFG]$ é:

$$A_{[EFG]} = \frac{6 \times 6}{2} = \frac{36}{2} = 18 \text{ cm}^2$$

Pelo que, como a altura da pirâmide é $\overline{AF} = 9$, o volume da pirâmide $[AFGE]$, em centímetro cúbicos, é:

$$V_{[AFGE]} = \frac{A_{[EFG]} \times \overline{AF}}{3} = \frac{18 \times 9}{3} = 54 \text{ cm}^3$$

Caderno 2

6.

6.1. Recorrendo à Regra de Laplace, e verificando que, existem 3 salas com sessões de divulgação do curso de Espanhol (as salas 3, 4 e 5), ou seja, 3 casos possíveis; e que apenas uma delas tem um número par (a sala 4), ou seja, 1 caso favorável, temos que a probabilidade, escrita na forma de fração, é:

$$p = \frac{1}{3}$$

6.2. Organizando todas as hipóteses possíveis para o Daniel assistir às duas apresentações, com recurso a uma tabela, temos:

Espanhol / **Alemão**	Sala 3	Sala 4	Sala 5
Sala 3	A3 E3	A3 E4	A3 E5
Sala 4	A4 E3	A4 E4	A4 E5

Assim, podemos verificar que existem 6 alternativas para as escolhas dos pares de sessões, dos quais quatro são em salas diferentes, pelo que, recorrendo à Regra de Laplace, para calcular a probabilidade do Daniel escolher as sessões em salas diferentes e apresentando o resultado na forma de fração irredutível, temos:

$$p = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

7. Verificando que em cada termo da sequência, os círculos estão dispostos em três linhas, em que:

- a linha de cima tem exatamente o número de círculos da ordem do termo
- a linha do meio tem mais um círculo que a linha de cima
- a linha de baixo tem mais um círculo que a linha do meio, ou ainda, mais dois círculos que a linha de cima

Assim, somando o número de círculos das três linhas do 100.º termo da sequência, obtemos:

$$100 + 101 + 102 = 303 \text{ círculos}$$

8. Como a função f é uma função de proporcionalidade inversa, então $f(x) = \frac{k}{x}, k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

   Como o ponto $(3;6)$ pertence ao gráfico de f, então $f(3) = 6$, e assim, temos que o valor da constante de proporcionalidade (k), pode ser calculado, substituindo as coordenadas do ponto na expressão algébrica da função f:

$$6 = \frac{k}{3} \Leftrightarrow 6 \times 3 = k \Leftrightarrow k = 18$$

9. Como o ponto B é o ponto do gráfico de f que tem abcissa 2, podemos calcular a sua ordenada (y_B), recorrendo à expressão algébrica da função f:

$$y_B = f(2) = 2(2)^2 = 2 \times 4 = 8$$

   Identificando o segmento $[OA]$ como a base maior do trapézio, o segmento $[CB]$ como a base menor e o segmento $[OC]$ como a altura, temos que a área do trapézio $[OABC]$ é:

$$A_{[OABC]} = \frac{\overline{OA} + \overline{CB}}{2} \times \overline{OC} = \frac{x_A + x_B}{2} \times y_B = \frac{4+2}{2} \times 8 = \frac{6}{2} \times 8 = 3 \times 8 = 24$$

10. Como a equação está escrita na fórmula canónica, usando a fórmula resolvente para resolver a equação e escrevendo as soluções na forma de fração irredutível, temos:

    $(a = 6,\ b = -1 \text{ e } c = -1)$

$$6x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(6)(-1)}}{2(6)} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{12} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{12} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1+5}{12} \vee x = \frac{1-5}{12} \Leftrightarrow x = \frac{6}{12} \vee x = \frac{-4}{12} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = -\frac{1}{3}$$

    C.S.$=\left\{-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right\}$

11. Resolvendo a inequação, temos:

$$3(1-x) > \frac{x+5}{2} \Leftrightarrow 3 - 3x > \frac{x+5}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{1}_{(2)} - \frac{3x}{1}_{(2)} > \frac{x+5}{2} \Leftrightarrow \frac{6}{2} - \frac{6x}{2} > \frac{x+5}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6 - 6x > x + 5 \Leftrightarrow -6x - x > 5 - 6 \Leftrightarrow -7x > -1 \Leftrightarrow 7x < 1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{7}$$

    C.S.$=\left]-\infty, \frac{1}{7}\right[$

12. Analisando as representações geométricas apresentadas, podemos verificar quem em todas existe uma representação da reta horizontal de equação $y = 3$

    Relativamente à reta de equação $y = -x+4$, podemos observar que apenas as opções (A) e (B) apresentam uma reta com declive negativo $(m = -1)$ e apenas as opções (A) e (D) apresentam uma reta, de declive não nulo, com ordenada na origem igual a 4

    Desta forma podemos concluir que a representação geométrica do sistema de equações $\begin{cases} y = 3 \\ y = -x + 4 \end{cases}$

    é o que está representado na opção (A).

    Resposta: **Opção A**

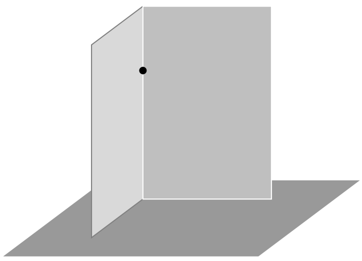
13. Usando as regras operatórias de potências e escrevendo o resultado na forma de uma potência de base 3, temos que:

$$\left(6^4\right)^2 \times 6^3 \times 2^{-11} = 6^{4\times 2} \times 6^3 \times \frac{1}{2^{11}} = 6^8 \times 6^3 \times \frac{1}{2^{11}} = 6^{8+3} \times \frac{1}{2^{11}} = 6^{11} \times \frac{1}{2^{11}} = \frac{6^{11}}{2^{11}} = \left(\frac{6}{2}\right)^{11} = 3^{11}$$

14. Identificando o caso notável $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ e observando que $4 = 2^2$, temos que:

$$x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x-2)(x+2)$$

15. Considerando três plano perpendiculares (como por exemplo no canto de uma sala) podemos identificar um plano e dois planos perpendiculares que contêm um ponto exterior ao primeiro plano.



Desta forma a afirmação "*Por um ponto exterior a um plano passa um* ***único*** *plano perpendicular ao primeiro*", é falsa.

Resposta: **Opção D**

16. Como o ângulo ACB é o ângulo inscrito relativo ao arco AB, a amplitude do ângulo é metade da amplitude do arco, ou seja:

$$B\hat{A}C = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{120}{2} = 60°$$

Assim, podemos determinar a amplitude do ângulo ABC (porque a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180°:

$$B\hat{A}C + A\hat{C}B + A\hat{B}C = 180 \Leftrightarrow 40 + 60 + A\hat{B}C = 180 - 40 - 60 \Leftrightarrow A\hat{B}C = 180 - 100 \Leftrightarrow A\hat{B}C = 80°$$

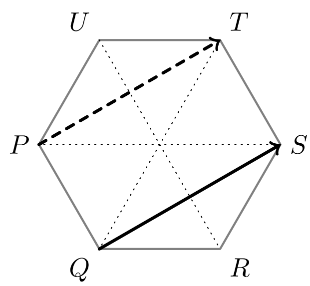
17. Como um hexágono regular tem os lados opostos paralelos e com o mesmo comprimento, então as diagonais $[QS]$ e $[PT]$ também são paralelas e com o mesmo comprimento, pelo que:

$$\overrightarrow{QS} = \overrightarrow{PT}$$

E assim, vem que:

$$P + \overrightarrow{QS} = P + \overrightarrow{PT} = P$$

Ou seja, a imagem do ponto P pelo translação associada ao vetor $\overrightarrow{QS}$ é o ponto T (como se pretende ilustrar na figura ao lado).



Resposta: **Opção D**

18. Escolhendo para o valor de a um número negativo e para o valor de b um número com menor valor absoluto, podemos ilustrar que a afirmação é falsa, por exemplo:

Se $a = -2$ e $b = 1$, temos que $a < b$, porque $-2 < 1$, mas $a^2 > b^2$, porque $(-2)^2 > 1^1 \Leftrightarrow 4 > 1$