# SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

## Proposta de Resolução do Exame de Matemática A - 12º ANO

## Código 635 - 1ª Fase - 2017 - 23 de junho de 2017

**Grupo I**

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Versão 1** | A | B | D | A | B | C | D | C |
| **Versão 2** | D | D | B | C | C | A | B | A |

**Grupo II**

**1.**

$$z_1 = \frac{1-3i^{19}}{1+i} = \frac{1-3i^{4\times4+3}}{1+i} = \frac{1-3i^3}{1+i} = \frac{1+3i}{1+i} = \frac{(1+3i)(1-i)}{1^2+1^2} = \frac{4+2i}{2} = 2+i$$

$$z_2 = -3kcis\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -3k(-i) = 3ki$$

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{5} \Leftrightarrow$$

$$|2+i-3ki| = \sqrt{5} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{4+(1-3k)^2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow$$

Observa-se que $4 + (1-3k)^2 > 0$, para qualquer $k$

$$(1-3k)^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$1-3k = 1 \vee 1-3k = -1 \Leftrightarrow$$

$$k = 0 \vee k = \frac{2}{3}$$

Como $k \in \mathbb{R}^+$, então $k = \frac{2}{3}$

**2.1**

Como $T(0,0,3)$ e $T'$ é o simétrico de $T$ em relação a $O$, então o centro da superfície esférica de diâmetro $[TT']$ é o ponto $O(0,0,0)$ e o raio é igual a $\overline{OT} = 3$

Assim, a equação da superfície esférica é $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

**2.2**

**Processo I**

$$\overrightarrow{UP}.\overrightarrow{RS} = \left\|\overrightarrow{UP}\right\|.\left\|\overrightarrow{RS}\right\|.\cos\pi = 3\times 3\times(-1) = -9$$

**Processo II**

Atendendo a que $\overrightarrow{UP} = \overrightarrow{TO} = (0,0,-3)$ e que $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{OT} = (0,0,3)$ então

$\overrightarrow{UP}.\overrightarrow{RS} = (0,0,-3).(0,0,3) = -9$

**2.3**

$T(0,0,3)$

Como as coordenadas de $Q$ satisfazem a igualdade $x + y = 2$

então $Q(0,2,0)$ e $\overrightarrow{TQ} = Q - T = (0,2,-3)$

Uma condição cartesiana que define a reta $TQ$ pode ser $x = 0 \wedge \frac{y}{2} = -\frac{z-3}{3}$

**2.4**

O número de casos possíveis é: ${}^{8}C_3$

Podemos obter o número de casos favoráveis por dois processos:

**Processo I**

${}^{4}C_3 \times 6 = 24$ (dos 6 planos perpendiculares a $xOy$, quatro contendo as faces e dois contendo as diagonais espaciais, cada um com quatro vértices do prisma, escolhem-se três desses vértices)

**Processo II**

$4 \times {}^{2}C_2 \times {}^{6}C_1 = 24$ (Podemos escolher, das quatro retas verticais que contêm as arestas laterais, os dois vértices do prisma e depois um qualquer dos restantes vértices)

Assim, a probabilidade pedida é dada por $P = \frac{24}{56} = \frac{3}{7}$

**3.**

$p(\overline{A} \cup B)$ significa a probabilidade de, ao retirar uma bola do saco, sair uma bola com um número maior que seis ou sair uma bola com um número par.

Para determinar uma expressão para a probabilidade de $\bar{A} \cup B$ podemos utilizar os seguintes processos:

**Processo I**

$$p(\overline{A} \cup B) = 1 - p(\overline{\overline{A} \cup B}) = 1 - p(A \cap \overline{B})$$

$p(A \cap \overline{B})$ é a probabilidade da bola que se retirou ter um número menor ou igual a 6 e ímpar, logo $p(A \cap \overline{B}) = \frac{3}{n}$, pelo que $p(\overline{A} \cup B) = 1 - \frac{3}{n} = \frac{n-3}{n}$

**Processo II**

$$p(\overline{A} \cup B) = p(\overline{A}) + p(B) - p(\overline{A} \cap B) =$$

$$= \frac{n-6}{n} + \frac{\frac{n}{2}}{n} - \frac{\frac{n}{2} - 3}{n} = \frac{n-3}{n}$$

**Processo III**

Começando por interpretar que o número de casos favoráveis ao acontecimento $\bar{A} \cup B$ é igual a $n - 3$ pois a este acontecimento só não pertencem os números $1, 3$ e $5$.

Assim, $P(\bar{A} \cup B) = \frac{n-3}{n}$

**4.1**

$$\sqrt{\left(f(0)\right)^2 + x^2} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{(9 - 2{,}5(e^{1-0{,}2\times 0} + e^{0{,}2\times 0-1}))^2 + x^2} = 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(9 - 2{,}5(e^1 + e^{-1}))^2 + x^2} = 2 \Leftrightarrow \left(9 - 2{,}5\left(e + \frac{1}{e}\right)\right)^2 + x^2 = 4$$

Observa-se que $(9 - 2{,}5(e^1 + e^{-1}))^2 + x^2 > 0$ para todo o x

$$x^2 = 4 - \left(9 - 2{,}5\left(e + \frac{1}{e}\right)\right)^2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4 - \left(9 - 2{,}5\left(e + \frac{1}{e}\right)\right)^2}$$

Então $x \approx 1{,}5329$ porque $x > 0$

Resposta:

$\boldsymbol{x} \approx 1{,}5$

A igualdade $\sqrt{(f(0))^2 + x^2} = 2$ corresponde à condição $\overline{PS} = 2$, já que $S(x,0)$, ou seja, o ponto $S \in [OR]$, que diste 2 metros de $P$, está a 1,5 metros (aproximadamente) de $O$.

## 4.2

**Processo I**

É necessário determinar o valor máximo de $f$.

$$f'(x) = -2{,}5(-0{,}2e^{1-0{,}2x} + 0{,}2e^{0{,}2x-1}) = 0{,}5e^{1-0{,}2x} - 0{,}5e^{0{,}2x-1}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 0{,}5e^{1-0{,}2x} - 0{,}5e^{0{,}2x-1} = 0 \Leftrightarrow e^{1-0{,}2x} = e^{0{,}2x-1} \Leftrightarrow 1 - 0{,}2x = 0{,}2x - 1$$

$$\Leftrightarrow 0{,}4x = 2 \Leftrightarrow x = 5$$

De acordo com a figura, o único ponto do gráfico de $f$ cuja tangente é horizontal corresponde ao máximo da função, dado por $f(5)$.
Construindo um quadro de estudo de sinal da derivada, pode confirmar-se esse facto.

| $x$ | 0 | | 5 | | 7 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | + | 0 | - | - |
| $f$ | min | $\nearrow$ | max | $\searrow$ | min |

Sendo $f$ crescente em $[0,5]$, decrescente em $[5,7]$ e $f'(5) = 0$ então $f(5) = 4$ é máximo absoluto da função $f$.

Resposta: Nas condições descritas, como $f(5) = 4$, o barco à vela não pode passar por baixo da ponte pois a distância máxima do ponto mais alto do mastro à superfície da água é 6 metros.

**Processo II**

$f(x) > 6 \Leftrightarrow 9 - 2{,}5(e^{1-0{,}2x} + e^{0{,}2x+1}) > 6 \Leftrightarrow -2{,}5(e^{1-0{,}2x} + e^{0{,}2x+1}) > -3$

$\Leftrightarrow e^{1-0{,}2x} + e^{0{,}2x-1} < \dfrac{3}{2{,}5} \Leftrightarrow \dfrac{e}{e^{0{,}2x}} + \dfrac{e^{0{,}2x}}{e} - \dfrac{6}{5} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{5e^2 + 5(e^{0{,}2x})^2 - 6e \times e^{0{,}2x}}{5e^{0{,}2x+1}} < 0 \Leftrightarrow$

$5e^2 + 5(e^{0{,}2x})^2 - 6e \times e^{0{,}2x} < 0$ pois $5e^{0{,}2x+1} > 0$ $\textit{para qualquer } x$

Efetuando uma mudança de variável, $y = e^{0{,}2x}$, obtém-se a inequação

$5y^2 - 6ey + 5e^2 < 0$

Determinando os zeros da expressão do 1º membro, $5y^2 - 6ey + 5e^2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{6e \mp \sqrt{36e^2 - 100e^2}}{10}$, conclui-se que é impossível no conjunto dos reais.

Como o gráfico da função quadrática associada é uma parábola com a concavidade voltada para cima e que não interseta o eixo $Ox$, a condição $5y^2 - 6ey + 5e^2 < 0$ é impossível.

Resposta: Como $f(x) > 6$ é impossível, o barco à vela não pode passar por baixo da ponte pois a distância máxima do ponto mais alto do mastro à superfície da água é 6 metros.

**5.1**

A função $g$ é contínua em $x = 1$ se existir $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$ e esse limite for igual a $g(1)$

- $g(1) = 2$

- $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{1-x^2}{1-e^{x-1}} = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{(1-x)(1+x)}{1-e^{x-1}} = \lim\limits_{x \to 1^-} \left(\frac{1-x}{1-e^{x-1}} \times (1+x)\right) =$

  $\lim\limits_{x \to 1^-} \left(\frac{x-1}{e^{x-1}-1} \times (1+x)\right) = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{1}{\frac{e^{x-1}-1}{x-1}} \times 2 = \lim\limits_{\substack{x \to 1^- \\ x-1 \to 0}} \frac{1}{\frac{e^{x-1}-1}{x-1}} \times 2 =$

  $\underbrace{\lim\limits_{y \to 0} \frac{1}{\frac{e^y-1}{y}}}_{\text{Limite notável}} \times 2 = 1 \times 2 = 2$ (efetuando a mudança de variável $y = x - 1$)

  logo $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = 2$

- $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \left(3 + \frac{sen(x-1)}{1-x}\right) = 3 + \lim\limits_{\substack{x \to 1^+ \\ x-1 \to 0}} \frac{sen(x-1)}{-(x-1)} =$

  $3 - \underbrace{\lim\limits_{y \to 0} \frac{seny}{y}}_{\text{Limite notável}} = 3 - 1 = 2$ (efetuando a mudança de variável $y = x - 1$)

  Logo, $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = 2$

Concluímos que existe $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$ pois $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = 2$ e $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = g(1) = 2$

Conclusão: A função $g$ é contínua em $x = 1$.

**5.2**

Se $x \in ]4,5[$, então $x > 1$

$g(x) = 3 \wedge 4 < x < 5 \Leftrightarrow 3 + \frac{sen(x-1)}{1-x} = 3 \wedge 4 < x < 5 \Leftrightarrow \frac{sen(x-1)}{1-x} = 0 \wedge 4 < x < 5$

$sen(x-1) = 0 \wedge x \neq 1 \wedge 4 < x < 5 \Leftrightarrow sen(x-1) = sen(0) \wedge 4 < x < 5 \Leftrightarrow$

$x - 1 = k\pi \wedge k \in \mathbb{Z} \quad \wedge 4 < x < 5 \Leftrightarrow x = 1 + k\pi \wedge k \in \mathbb{Z} \quad \wedge 4 < x < 5$

$4 < 1 + k\pi < 5 \Leftrightarrow k \in \mathbb{Z} \quad \wedge 3 < k\pi < 4 \Leftrightarrow k \in \mathbb{Z} \quad \wedge \dfrac{3}{\pi} < k < \dfrac{4}{\pi} \Leftrightarrow k = 1$

Assim, temos que a solução se obtém para $k = 1$, ou seja, $x = 1 + \pi$ .

**5.3**

Abcissa de $A$ ($x < 0$):

$\dfrac{1 - x^2}{1 - e^{x-1}} = 0 \wedge x < 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \wedge 1 - e^{x-1} \neq 0 \wedge \ x < 0 \Leftrightarrow$

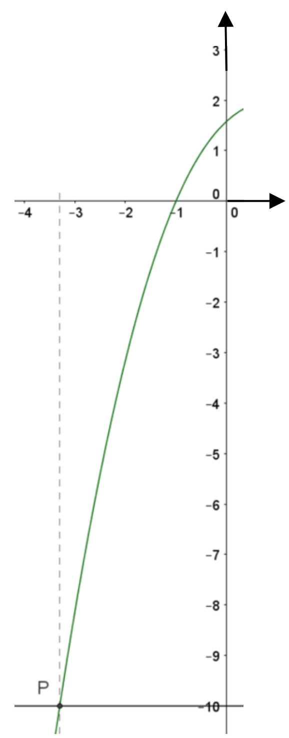
$(x = -1 \vee x = 1) \wedge x \neq 1 \wedge x < 0 \Leftrightarrow x = -1$

Assim, $A(-1{,}0)$

$Área_{\Delta[QAP]} = \dfrac{\overline{OA} \times |ordenada\ de\ P|}{2} = \dfrac{\overline{OA} \times |g(x)|}{2}$

Então $\frac{|g(x)|}{2} = 5 \Leftrightarrow |g(x)| = 10$

Neste caso, corresponde a $g(x) = -10$




A abcissa de $P$ é a solução da equação $g(x) = -10$

A solução obtém-se determinando a abcissa do ponto de Interseção do gráfico de $g$ com a reta $y = -10$

Utilizando a janela: $[-4{,}0] \times [-11{,}3]$,

obtém-se o gráfico junto.

O ponto de interseção $P$ tem coordenadas:

$P(-3{,}3;-10)$

Resposta: $x \approx -3{,}3$

**6.**

O problema pode ser resolvido por vários processos. São apresentados dois.

**Processo I**

Se o triângulo $[OPQ]$ é isósceles, então $Q(2a;0)$

$f'(a)$ é igual ao declive da reta $r$, ou seja, $m_{PQ}$

$P(a; f(a))$

$Q(2a;0)$

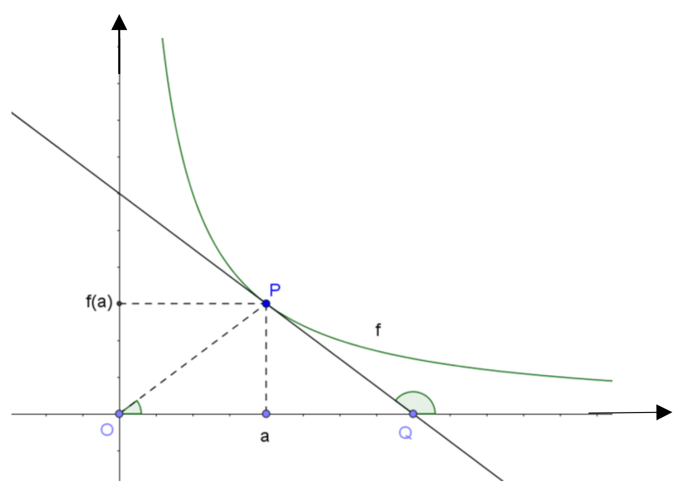
Então o declive da reta $PQ$ é

$$m = \frac{f(a)}{a-2a} = \frac{f(a)}{-a} \Leftrightarrow$$

$$f'(a) = -\frac{f(a)}{a}$$

Portanto, $f'(a) + \frac{f(a)}{a} = -\frac{f(a)}{a} + \frac{f(a)}{a} = 0$

**Processo II**




Se $f$ está definida em $\mathbb{R}^+$ e $f'(x) < 0$

então $f$ é decrescente no seu domínio.

Na figura está representado o gráfico de uma possível função $f$ e a reta $PQ$ tangente a esse gráfico em $P(a, f(a))$.

Se $\overline{OP} = \overline{PQ}$, então $Q\hat{O}P = O\hat{Q}P$

$$\frac{f(a)}{a} = tg(Q\hat{O}P)$$

$$f'(a) = m_{PQ} = tg\left(\pi - P\hat{Q}O\right) = -tg\left(O\hat{Q}P\right)$$

Então $f'(a) = -tg\left(O\hat{Q}P\right) = -tg\left(Q\hat{O}P\right) = -\frac{f(a)}{a}$

Assim, $f'(a) + \frac{f(a)}{a} = -\frac{f(a)}{a} + \frac{f(a)}{a} = 0$

**FIM**