

Exame Final Nacional de Matemática A
Prova 635 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2017

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

DAISY, Entrelinha 1,5, sem figuras

Critérios de Classificação

12 Páginas

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

A ausência de indicação inequívoca da versão da prova implica a classificação com zero pontos das respostas aos itens de escolha múltipla.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

Itens de seleção

Nos itens de escolha múltipla, a cotação do item só é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a opção correta. Todas as outras respostas são classificadas com zero pontos.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, a transcrição do texto da opção escolhida é considerada equivalente à indicação da letra correspondente.

Itens de construção

Nos itens de resposta restrita, os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

A classificação das respostas aos itens que envolvam a produção de um texto tem em conta a organização dos conteúdos e a utilização adequada de vocabulário específico da Matemática.

As respostas que não apresentem exatamente os mesmos termos ou expressões constantes dos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso obrigatório das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação, num referencial, do gráfico da função ou dos gráficos das funções visualizados.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de resposta restrita e de resposta extensa que envolvam cálculos ou justificações.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelo programa da disciplina (ver nota 1). O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplos: «sem recorrer à calculadora gráfica», «recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

Situação	Classificação
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa, bem como a cada uma das etapas subsequentes que dela dependam, é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade em que, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

Nota 1 – A título de exemplo, faz-se notar que não são aceites processos de resolução que envolvam a aplicação da regra de Cauchy, da regra de L'Hôpital ou de resultados da teoria de matrizes.

Nota 2 – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

GRUPO I

1. a 8. (8 × 5 pontos)..... **40 pontos**

Chave:

Itens	1	2	3	4	5	6	7	8
Versão 1	A	B	D	A	B	C	D	C

GRUPO II

1. **15 pontos**

Escrever z_1 na forma algébrica 5 pontos

Escrever $1 - 3i^{19} = 1 + 3i$ 1 ponto

Escrever $\frac{1+3i}{1+i} = \frac{(1+3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$ 1 ponto

Obter z_1 na forma algébrica 3 pontos

Escrever z_2 na forma algébrica 2 pontos

Escrever $\text{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -i$ 1 ponto

Obter $z_2 = 3ki$ 1 ponto

OU

Escrever $-3k \text{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 3k \text{cis}\left(\frac{5\pi}{2}\right)$ 1 ponto

Obter $z_2 = 3ki$ 1 ponto

Obter a condição $4 + (1 - 3k)^2 = 5$ (ou equivalente) 5 pontos

Obter o valor de $k \left(\frac{2}{3}\right)$ 3 pontos

2.1. **5 pontos**

Concluir que o centro da superfície esférica é a origem do referencial 1 ponto

Concluir que o raio da superfície esférica é 3 2 pontos

Escrever a equação pedida ($x^2 + y^2 + z^2 = 9$ ou equivalente) (**ver nota**) ... 2 pontos

Nota – Se for apresentada apenas a condição $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ (ou equivalente), a classificação a atribuir à resposta é 5 pontos.

2.2. **10 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Escrever $\|\vec{OA}\| = \|\vec{AO}\| = 3$ 3 pontos

Escrever $\cos(\widehat{OA\vec{AO}}) = -1$ 5 pontos

Obter o valor de $\vec{OA} \cdot \vec{AO}$ (-9) 2 pontos

2.º Processo

Escrever $\vec{OA} = (0, 0, 3)$ 4 pontos

Escrever $\vec{AO} = (0, 0, -3)$ 4 pontos

Obter o valor de $\vec{OA} \cdot \vec{AO}$ (-9) 2 pontos

Nota – Se a resposta se limitar à escrita de $\vec{OA} \cdot \vec{AO} = -3 \times 3 = -9$, a classificação a atribuir é 10 pontos.

2.3. **15 pontos**

Obter as coordenadas do ponto B 4 pontos

Determinar as coordenadas do vetor \vec{AB} 4 pontos

Obter uma condição cartesiana da reta AB 7 pontos

Escrever $x = 0$ 3 pontos

Escrever $\frac{y}{2} = \frac{z-3}{-3}$ 3 pontos

Escrever uma condição cartesiana da reta AB

$\left(x = 0 \wedge \frac{y}{2} = \frac{z-3}{-3} \text{ ou equivalente}\right)$ (**ver nota**) 1 ponto

Nota – Se uma das duas etapas imediatamente anteriores a esta tiver sido pontuada com 0 pontos, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

2.4. **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Apresentar o número de casos possíveis: 8C_3 (**ver nota 1**) 6 pontos

Apresentar o número de casos favoráveis: $6 \times {}^4C_3$ (**ver nota 2**) 8 pontos

Obter a probabilidade pedida $\left(\frac{3}{7}\right)$ (**ver nota 4**) 1 ponto

2.º Processo

- Apresentar o número de casos possíveis: 8A_3 (ver nota 1) 6 pontos
- Apresentar o número de casos favoráveis: $6 \times {}^4A_3$ (ver nota 3) 8 pontos
- Obter a probabilidade pedida $\left(\frac{3}{7}\right)$ (ver nota 4) 1 ponto

Notas:

1. Se a expressão apresentada não for equivalente a 8C_3 (1.º processo de resolução) ou a 8A_3 (2.º processo de resolução), a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.
2. Se a expressão apresentada for 4C_3 , a pontuação a atribuir nesta etapa é 1 ponto. Caso a expressão apresentada seja do tipo $k{}^4C_3$, com $k \in \{2, 3, 4, 5\}$, a pontuação a atribuir nesta etapa é 3 pontos. Caso a expressão apresentada seja incorreta e diferente das expressões referidas, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.
3. Se a expressão apresentada for 4A_3 , a pontuação a atribuir nesta etapa é 1 ponto. Caso a expressão apresentada seja do tipo $k{}^4A_3$, com $k \in \{2, 3, 4, 5\}$, a pontuação a atribuir nesta etapa é 3 pontos. Caso a expressão apresentada seja incorreta e diferente das expressões referidas, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.
4. Se as etapas relativas ao número de casos possíveis e ao número de casos favoráveis tiverem sido pontuadas com 0 pontos, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos. Caso o valor obtido não pertença ao intervalo $[0, 1]$, a pontuação a atribuir nesta etapa também é 0 pontos.

3. 15 pontos

Escrever o significado de $P(\overline{A} \cup B)$ no contexto da situação descrita (É a probabilidade de o número da bola retirada ser maior do que 6 ou ser par.) 5 pontos

Apresentar a expressão pedida $\left(\frac{n-3}{n}\right)$ 10 pontos

A expressão pedida pode ser obtida por, pelo menos, três processos.

1.º Processo

Referir que $P(\overline{A} \cup B) = 1 - P(A \cap \overline{B})$ 4 pontos

Determinar $P(A \cap \overline{B})$, em função de $n \left(\frac{3}{n}\right)$ 5 pontos

Obter $P(\overline{A} \cup B) = \frac{n-3}{n}$ 1 ponto

2.º Processo

Determinar $P(\overline{A})$, em função de $n \left(\frac{n-6}{n}\right)$ 2 pontos

Determinar $P(B) \left(\frac{1}{2}\right)$ 2 pontos

Determinar $P(\overline{A} \cap B)$, em função de $n \left(\frac{n-6}{2n}\right)$ 3 pontos

Escrever $P(\overline{A} \cup B) = \frac{n-6}{n} + \frac{1}{2} - \frac{n-6}{2n}$ 2 pontos

Obter $P(\overline{A} \cup B) = \frac{n-3}{n}$ 1 ponto

3.º Processo

Apresentar o número de casos possíveis, em função de n (ver nota 1).....	2 pontos
Apresentar o número de casos favoráveis, em função de n (ver nota 2).....	7 pontos
Escrever a expressão pedida (ver nota 3)	1 ponto

Notas:

1. Se a expressão apresentada não for n , a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.
2. Se for apresentada apenas a expressão $n - 3$, sem qualquer justificação, a pontuação a atribuir nesta etapa é 5 pontos.
3. Se as etapas relativas ao número de casos possíveis e ao número de casos favoráveis tiverem sido pontuadas com 0 pontos, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

4.1. 15 pontos

Escrever $\sqrt{(f(0))^2 + x^2} = 2 \Leftrightarrow (f(0))^2 + x^2 = 4$	3 pontos
Determinar $f(0)$	2 pontos
Obter a solução da equação, arredondada às décimas (1,5)	5 pontos
Interpretar geometricamente a solução (1,5 é a abcissa do ponto Q , que dista duas unidades do ponto P)	5 pontos

4.2. 15 pontos

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, três processos.

1.º Processo

Determinar $f'(x)$ (ver nota)	4 pontos
Determinar o zero de f'	4 pontos
Escrever $f'(x) = 0$	1 ponto
Obter o zero de f'	3 pontos
Justificar que a função f atinge um máximo para $x = 5$	3 pontos
Apresentar um quadro de sinal de f' e de monotonia de f (ou equivalente)	2 pontos
Concluir que a função tem um máximo para $x = 5$	1 ponto
Determinar $f(5)$ (4)	2 pontos
Responder à questão (Não, o barco não pode passar por baixo da ponte.)	2 pontos

Nota – Se for evidente a intenção de determinar a derivada da função, a pontuação mínima a atribuir nesta etapa é 1 ponto.

2.º Processo

Escrever $f(x) \geq 6$	1 ponto
Resolver a inequação $f(x) \geq 6$	13 pontos
Designar $e^{1-0,2x}$ por y (por exemplo)	2 pontos
Obter $y + \frac{1}{y} \leq 1,2$	3 pontos
Obter $y^2 - 1,2y + 1 \leq 0$	2 pontos
Resolver a equação $y^2 - 1,2y + 1 = 0$	2 pontos
Justificar que a inequação é impossível	4 pontos
Responder à questão (Não, o barco não pode passar por baixo da ponte.)	1 ponto

3.º Processo

Escrever $f(x) = 6$	1 ponto
Resolver a equação $f(x) = 6$	9 pontos
Designar $e^{1-0,2x}$ por y (por exemplo)	2 pontos
Obter a equação $y + \frac{1}{y} = 1,2$	3 pontos
Obter a equação $y^2 - 1,2y + 1 = 0$	2 pontos
Concluir que a equação é impossível	2 pontos
Referir que $6 > f(0)$	4 pontos
Responder à questão (Não, o barco não pode passar por baixo da ponte.)	1 ponto

5.1. 15 pontos

Determinar $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x)$	8 pontos
Escrever $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-x^2}{1-e^{x-1}}$	1 ponto
Escrever $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-x^2}{1-e^{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(1+x)(1-x)}{1-e^{x-1}}$	1 ponto
Escrever $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(1+x)(1-x)}{1-e^{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (1+x) \times \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-x}{1-e^{x-1}}$..	1 ponto
Escrever $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1+x) \times \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-x}{1-e^{x-1}} = 2 \times \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-x}{1-e^{x-1}}$...	1 ponto
Escrever $2 \times \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-x}{1-e^{x-1}} = 2 \times \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{e^{x-1}-1}$	1 ponto
Escrever $2 \times \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{e^{x-1}-1} \underset{y=x-1}{=} 2 \times \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{y}{e^y-1}$	1 ponto

- Escrever $2 \times \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{y}{e^y - 1} = 2 \times \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{1}{\frac{e^y - 1}{y}}$ 1 ponto
- Obter $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = 2$ 1 ponto
- Determinar $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$ 5 pontos
- Escrever $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(3 + \frac{\text{sen}(x-1)}{1-x} \right)$ 1 ponto
- Escrever $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(3 + \frac{\text{sen}(x-1)}{1-x} \right) = 3 - \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\text{sen}(x-1)}{x-1}$ 1 ponto
- Escrever $3 - \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\text{sen}(x-1)}{x-1} \underset{y=x-1}{=} 3 - \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen } y}{y}$ 2 pontos
- Obter $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = 2$ 1 ponto
- Referir que $g(1) = 2$ 1 ponto
- Concluir que a função g é contínua no ponto 1 1 ponto

5.2. **15 pontos**

- Escrever $g(x) = 3 \Leftrightarrow 3 + \frac{\text{sen}(x-1)}{1-x} = 3$ 1 ponto
- Escrever $3 + \frac{\text{sen}(x-1)}{1-x} = 3 \Leftrightarrow \text{sen}(x-1) = 0$ 4 pontos
- Escrever $\text{sen}(x-1) = 0 \Leftrightarrow x-1 = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 4 pontos
- Escrever $x-1 = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 1 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 2 pontos
- Obter a solução da equação pertencente ao intervalo $]4, 5[(1 + \pi)$ 4 pontos

5.3. **15 pontos**

- Determinar a abcissa do ponto A 5 pontos
- Equacionar o problema $\left(\frac{1 \times \frac{x^2 - 1}{1 - e^{x-1}}}{2} = 5 \text{ ou equivalente} \right)$ (**ver nota**) 10 pontos

Nota – Se a equação apresentada for $\frac{1 \times \frac{1 - x^2}{1 - e^{x-1}}}{2} = 5$ (ou equivalente), a pontuação a atribuir nesta etapa é 5 pontos.

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, quatro processos.

1.º Processo

Identificar as coordenadas do ponto $P (a, f(a))$ 1 ponto

Escrever uma equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa a
 $(y = f'(a)x + f(a) - a f'(a))$ 2 pontos

Determinar as coordenadas do ponto $Q (a - \frac{f(a)}{f'(a)}, 0)$ 2 pontos

Escrever $\overline{OP} = \sqrt{a^2 + (f(a))^2}$ 1 ponto

Escrever $\overline{PQ} = \sqrt{\left(\frac{f(a)}{f'(a)}\right)^2 + (f(a))^2}$ 1 ponto

Obter o valor pedido (0) 3 pontos

2.º Processo

Identificar as coordenadas do ponto $P (a, f(a))$ 1 ponto

Escrever uma equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa a
 $(y = f'(a)x + f(a) - a f'(a))$ 2 pontos

Determinar as coordenadas do ponto $Q (a - \frac{f(a)}{f'(a)}, 0)$ 2 pontos

Concluir que $a - \frac{f(a)}{f'(a)} = 2a$ 3 pontos

Obter o valor pedido (0) 2 pontos

3.º Processo

Designemos por α a amplitude do ângulo POQ e por β a inclinação da reta r

Referir que $\text{tg}\beta = f'(a)$ 1 ponto

Referir que $\text{tg}\alpha = \frac{f(a)}{a}$ 3 pontos

Referir que $\beta = \pi - \alpha$ 3 pontos

Concluir que $f'(a) = -\frac{f(a)}{a}$ 2 pontos

Obter o valor pedido (0) 1 ponto

4.º Processo

- Identificar as coordenadas do ponto $P (a, f(a))$ 1 ponto
- Identificar as coordenadas do ponto $Q (2a, 0)$ 3 pontos
- Obter o declive da reta PQ 3 pontos
- Concluir que $f'(a) = -\frac{f(a)}{a}$ 2 pontos
- Obter o valor pedido (0) 1 ponto

COTAÇÕES

Grupo	Item												
	Cotação (em pontos)												
I	1. a 8.												40
	8 × 5 pontos												
II	1.	2.1.	2.2.	2.3.	2.4.	3.	4.1.	4.2.	5.1.	5.2.	5.3.	6.	160
	15	5	10	15	15	15	15	15	15	15	15	10	
TOTAL													200