REPÚBLICA PORTUGUESA

EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2017

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Entrelinha 1,5, sem figuras

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 13 Páginas

VERSÃO 1

Indique de forma legível a versão da prova.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \ \cos b + \operatorname{sen} b \ \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \ \cos b - \operatorname{sen} a \ \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \ \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \quad (k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x + 1)}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

GRUPO I

1. Considere todos os números naturais de cinco algarismos diferentes que se podem formar com os algarismos $1, 2, 3, 4$ e 5

Destes números, quantos têm os algarismos pares um a seguir ao outro?

(A) 24

(B) 48

(C) 72

(D) 96

2. A tabela de distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é a seguinte.

x_i	$P(X = x_i)$
1	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{6}$
4	$\frac{1}{4}$

Qual é o valor da probabilidade condicionada $P(X > 1 \mid X \leq 3)$?

(A) $\frac{3}{4}$

(B) $\frac{1}{4}$

(C) $\frac{8}{9}$

(D) $\frac{5}{9}$

3. De uma função f, de domínio $\mathbb{R}$, com derivada finita em todos os pontos do seu domínio, sabe-se que $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 2x}{f(x) - f(2)} = 4$

Qual é o valor de $f'(2)$?

(A) $-\frac{1}{2}$

(B) $-\frac{1}{4}$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) $\frac{1}{4}$

4. Considere a função f, de domínio $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, tal que os objetos $1, 3$ e 5 têm imagem 0 e os objetos 2 e 4 têm imagem 2

Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = x - 2$

Quais são os zeros da função $g \circ f$?

(o símbolo $\circ$ designa a composição de funções)

(A) $1, 3$ e 5

(B) 2 e 4

(C) $3, 4$ e 5

(D) 1 e 3

5. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$

Da segunda derivada de f sabe-se que:

- é nula para $x = 0$
- é negativa no intervalo $]-\infty, 0[$
- é positiva no intervalo $]0, +\infty[$

Seja g a função definida por $g(x) = -f(x-5)$

Em qual dos intervalos seguintes o gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo?

(A) $]-\infty, 5[$

(B) $]-5, +\infty[$

(C) $]5, +\infty[$

(D) $]-\infty, -5[$

6. Seja z um número complexo de argumento $\frac{\pi}{5}$

Qual dos seguintes valores é um argumento do número complexo $-5iz$?

(A) $-\frac{3\pi}{10}$

(B) $-\frac{4\pi}{5}$

(C) $-\frac{7\pi}{5}$

(D) $-\frac{13\pi}{10}$

7. Considere, num referencial o.n. xOy, a região definida pela condição

$$(x+1)^2+(y+1)^2 \leq 1 \quad \wedge \quad x+y+2 \geq 0$$

Qual é o perímetro dessa região?

(A) $\pi + 1$

(B) $\frac{\pi}{2} + 1$

(C) $\pi + 2$

(D) $\frac{\pi}{2} + 2$

8. Seja (u_n) a sucessão definida por $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-n}$

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) A sucessão (u_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$

(B) A sucessão (u_n) é uma progressão geométrica de razão 2

(C) A sucessão (u_n) é uma progressão aritmética de razão $\frac{1}{2}$

(D) A sucessão (u_n) é uma progressão aritmética de razão 2

GRUPO II

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, sejam z_1 e z_2 tais que $z_1 = 2 + i$ e $z_1 \times \overline{z_2} = 4 - 3i$

Considere a condição $|z - z_1| = |z - z_2|$

Mostre que o número complexo $\sqrt{2}\,\text{cis}\,\frac{\pi}{4}$ verifica esta condição e interprete geometricamente este facto.

Resolva este item sem recorrer à calculadora.

2. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, o cubo $[LMNOPQRS]$

Sabe-se que:

- o vértice O é a origem do referencial;
- a aresta $[OL]$ está contida no semieixo positivo Ox
- a aresta $[ON]$ está contida no semieixo positivo Oy
- nenhuma das coordenadas do vértice R é nula;
- o plano LNR é definido pela equação $x + y - z = 2$

2.1. Verifique que o vértice L tem abcissa igual a 2

2.2. Seja r a reta definida pela condição $x - 1 = 1 - y = z$

Determine as coordenadas do ponto de intersecção da reta r com o plano LNR

2.3. Seja V o vértice de uma pirâmide regular cuja base coincide com a face superior do cubo.

Sabe-se que:

- a cota do ponto V é superior a 2
- o volume da pirâmide é 4

Determine a amplitude do ângulo ORV

Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

3. Uma escola secundária tem alunos de ambos os sexos.

3.1. Escolhe-se, ao acaso, um aluno dessa escola.

Seja A o acontecimento «o aluno escolhido é rapariga», e seja B o acontecimento «o aluno escolhido frequenta o 10.º ano».

Sabe-se que:

- a probabilidade de o aluno escolhido ser rapaz ou não frequentar o 10.º ano é $0{,}82$
- a probabilidade de o aluno escolhido frequentar o 10.º ano, sabendo que é rapariga, é $\frac{1}{3}$

Determine $P(A)$

3.2. Uma das turmas dessa escola tem trinta alunos, numerados de 1 a 30

Com o objetivo de escolher quatro alunos dessa turma para formar uma comissão, introduzem-se, num saco, trinta cartões, indistinguíveis ao tato, numerados de 1 a 30. Em seguida, retiram-se quatro cartões do saco, simultaneamente e ao acaso.

Qual é a probabilidade de os dois menores números saídos serem o 7 e o 22 ?

Apresente o resultado arredondado às milésimas.

4. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

Resolva os itens **4.1.**, **4.2.** e **4.3.** recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

4.1. Estude a função f quanto à existência de assíntotas do seu gráfico paralelas aos eixos coordenados.

4.2. Resolva a inequação $f(x) > 2 \ln x$

Apresente o conjunto solução usando a notação de intervalos de números reais.

4.3. Para um certo número real k, a função g, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = \frac{k}{x} + f(x)$, tem um extremo relativo para $x = 1$

Determine esse número k

5. Considere o desenvolvimento de $\left(2x \operatorname{sen}\alpha + \frac{\cos\alpha}{x}\right)^2$, em que $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x \neq 0$

Determine os valores de α, pertencentes ao intervalo $]\pi, 2\pi[$, para os quais o termo independente de x, neste desenvolvimento, é igual a 1

Resolva este item recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

6. Seja f a função, definida em $\mathbb{R}_0^+$ por

$$f(x)=\begin{cases}30+x\,\mathrm{sen}(\pi x) & \text{se } 0\leq x<12\\ 30+3e^{13,5-x}\,\mathrm{sen}(\pi x) & \text{se } x\geq 12\end{cases}$$

(o argumento da função seno está expresso em radianos)

6.1. Resolva, no intervalo $[0,2[$, a equação $f(x)=30$

6.2. Seja A o ponto do gráfico da função f de abcissa $13{,}5$

Seja r a reta de equação $y=30$

Seja B o ponto da reta r de abcissa $8{,}5$

Os pontos A e B pertencem a uma circunferência cujo centro pertence à reta r

Qual é o raio dessa circunferência?

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I

1. a **8.** .... (8 × 5 pontos)	40 pontos	
		40 pontos

GRUPO II

1.	15 pontos	
2.		
2.1.	5 pontos	
2.2.	10 pontos	
2.3.	15 pontos	
3.		
3.1.	15 pontos	
3.2.	15 pontos	
4.		
4.1.	15 pontos	
4.2.	15 pontos	
4.3.	15 pontos	
5.	15 pontos	
6.		
6.1.	15 pontos	
6.2.	10 pontos	
		160 pontos

TOTAL .... **200 pontos**