Canguru Matemático sem Fronteiras 2015

http://www.mat.uc.pt/canguru/

Categoria: Estudante — Duração: 1h 30min
Destinatários: alunos do 12.º ano de escolaridade

Nome: ______________________________ Turma: __________

Não podes usar calculadora. Em cada questão deves assinalar a resposta correta. As questões estão agrupadas em três níveis: Problemas de 3 pontos, Problemas de 4 pontos e Problemas de 5 pontos. Inicialmente tens 30 pontos. Por cada questão correta ganhas tantos pontos quantos os do nível da questão, no entanto, por cada questão errada és penalizado em 1/4 dos pontos correspondentes a essa questão. Não és penalizado se não responderes a uma questão, mas infelizmente também não adicionas pontos.

Problemas de 3 pontos

1. A Andreia nasceu em 1997 e a sua irmã Carlota nasceu em 2001. Relativamente à diferença das suas idades, podemos dizer com toda a certeza que:

(**A**) é inferior a 4 anos
(**B**) é pelo menos de 4 anos
(**C**) é exatamente de 4 anos
(**D**) é superior a 4 anos
(**E**) não é inferior a 3 anos

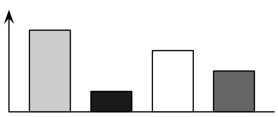
2. Sejam a e b dois números reais. Então $(a-b)^5 + (b-a)^5$ é igual a:

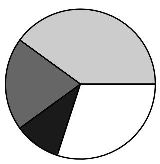
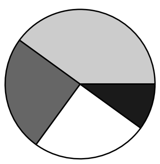
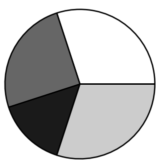
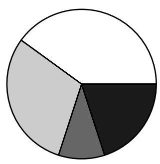
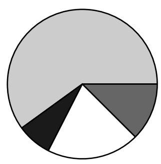
(**A**) 0
(**B**) $2\,(a-b)^5$
(**C**) $2a^5 - 2b^5$
(**D**) $2a^5 + 2b^5$
(**E**) $2a^5 + 10a^4b + 20a^3b^2 + 20a^2b^3 + 10ab^4 + 2b^5$

3. Quantas soluções tem a equação $2^{2x} = 4^{x+1}$?

(**A**) 0 (**B**) Infinitas (**C**) 2 (**D**) 1 (**E**) 3

4. A Constança desenhou um gráfico de barras representando o número de árvores de quatro espécies encontradas durante uma visita ao jardim botânico. O Gonçalo acha que uma representação gráfica circular, em percentagem, representará melhor as quantidades das quatro espécies. Qual será o aspeto da representação gráfica circular?



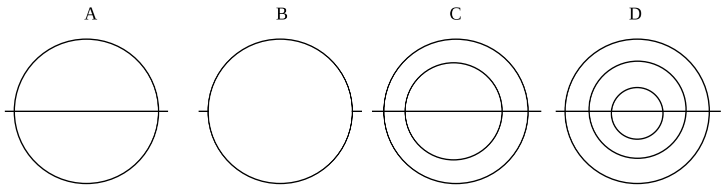
(**A**) 
(**B**) 
(**C**) 
(**D**) 
(**E**) 

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
FCTUC FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DE COIMBRA

5. Se adicionarmos os 31 números inteiros de 2001 a 2031 e dividirmos a soma por 31, que número obtemos?

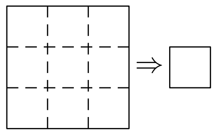
(**A**) 2012 (**B**) 2013 (**C**) 2015 (**D**) 2016 (**E**) 2496

6. Quantas das seguintes figuras podem ser desenhadas com um traço contínuo sem se desenhar um segmento duas vezes?



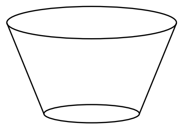
(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 2 (**D**) 3 (**E**) 4

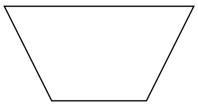
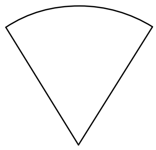
7. O Henrique dobrou uma folha de papel quadrada várias vezes ao longo das linhas a tracejado indicadas na figura, em qualquer direção ou ordem, de modo a obter um quadrado. Depois cortou um canto desse quadrado e desdobrou a folha de papel. Quantos buracos existem na folha de papel?

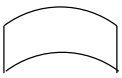
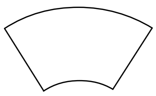


(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 2 (**D**) 4 (**E**) 9

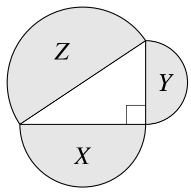
8. Um copo tem a forma de um cone truncado (ver a figura à direita). O Dinis quer revestir a parte exterior do copo, excluindo a base, com papel. Qual das seguintes formas deverá ter o papel de modo a revestir completamente o copo sem sobreposições?



(**A**)  (**B**)  (**C**) 

(**D**)  (**E**) 

9. Os diâmetros de três semicírculos são os lados de um triângulo retângulo (ver a figura). As áreas dos semicírculos são X cm^2, Y cm^2 e Z cm^2, como indicado na figura. Qual das seguintes proposições é verdadeira?



(**A**) $X + Y < Z$ (**B**) $\sqrt{X} + \sqrt{Y} = \sqrt{Z}$

(**C**) $X + Y = Z$ (**D**) $X^2 + Y^2 = Z^2$

(**E**) $X^2 + Y^2 = Z$

10. Qual das seguintes é a lista completa do número de ângulos agudos que um quadrilátero convexo pode ter?

(**A**) 0, 1, 2 (**B**) 0, 1, 2, 3 (**C**) 0, 1, 2, 3, 4 (**D**) 0, 1, 3 (**E**) 1, 2, 3

Problemas de 4 pontos

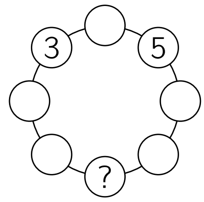
11. O valor de $\sqrt{(2015+2015)+(2015-2015)+(2015\times 2015)+(2015\div 2015)}$ é:

(**A**) $\sqrt{2015}$ (**B**) 2015 (**C**) 2016 (**D**) 2017 (**E**) 4030

12. Num referencial cartesiano ortonormado xOy, o eixo dos xx e os gráficos das funções f e g, definidas por $f(x)=2-x^2$ e $g(x)=x^2-1$, dividem o plano cartesiano em:

(**A**) 7 regiões (**B**) 8 regiões (**C**) 9 regiões (**D**) 10 regiões (**E**) 11 regiões

13. A Rita quer escrever um número em cada círculo da figura de modo a que cada número seja a soma dos dois números dos círculos adjacentes. Dois círculos já estão preenchidos com os números indicados. Que número deverá a Rita escrever no círculo com o ponto de interrogação?



(**A**) -5 (**B**) -16 (**C**) -8

(**D**) -3 (**E**) É impossível

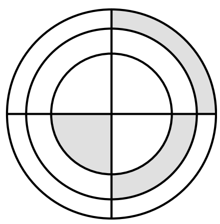
14. Dados cinco números naturais diferentes a, b, c, d, e, sabemos que $c \div e = b$, $a+b=d$ e $e-d=a$. Qual dos números a, b, c, d ou e é o maior?

(**A**) a (**B**) b (**C**) c (**D**) d (**E**) e

15. A média geométrica de n números positivos é definida como a raiz de índice n do produto desses n números. Se a média geométrica de 3 números for 3 e a média geométrica de outros 3 números for 12, qual é a média geométrica dos 6 números?

(**A**) 4 (**B**) 6 (**C**) $\frac{15}{2}$ (**D**) $\frac{15}{6}$ (**E**) 36

16. Na figura podemos ver 3 círculos concêntricos e dois diâmetros perpendiculares. Se as três regiões a sombreado tiverem a mesma área e o raio do círculo menor for um, qual é o produto dos raios dos três círculos?



(**A**) $\sqrt{6}$ (**B**) 3 (**C**) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

(**D**) $2\sqrt{2}$ (**E**) 6

17. Um vendedor de automóveis comprou dois carros. Ele vendeu o primeiro carro com um lucro de 40% e o segundo com um lucro de 60%. O lucro que teve com os dois carros foi de 54 %. A razão entre o preço que o vendedor pagou pelo primeiro carro e o preço que pagou pelo segundo é:

(**A**) $10 \div 13$ (**B**) $20 \div 27$ (**C**) $3 \div 7$ (**D**) $7 \div 12$ (**E**) $2 \div 3$

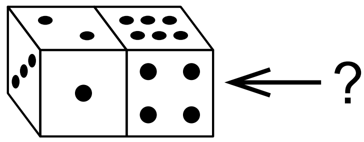
18. O Gonçalo tem um dado cúbico, equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6. A Constança tem outro dado, cúbico e equilibrado, mas especial: três das seis faces têm o número 2 e as outras três faces têm o número 5. Cada um lança o seu dado e vence o que tiver maior número na face superior. Se os dois números forem iguais há um empate. Qual é a probabilidade de a Constança vencer?

(**A**) $\frac{1}{3}$ (**B**) $\frac{7}{18}$ (**C**) $\frac{5}{12}$ (**D**) $\frac{1}{2}$ (**E**) $\frac{11}{18}$

19. Dentro de uma caixa existem 2015 berlindes, numerados de 1 a 2015. O Martim decidiu pintar da mesma cor os berlindes em que a soma dos algarismos do seu número é igual. Os berlindes cuja soma dos algarismos do seu número seja diferente terão cores diferentes. De quantas cores diferentes vai precisar o Martim?

(**A**) 10 (**B**) 27 (**C**) 28 (**D**) 29 (**E**) 2015

20. Num dado normal, a soma das pintas em faces opostas é 7. O Ivo tem dois dados normais idênticos, representados na figura. Quantas pintas poderão estar na face (não visível) à direita, assinalada na figura pelo ponto de interrogação?



(**A**) Apenas 5 (**B**) Apenas 2 (**C**) 2 ou 5

(**D**) 1, 2, 3 ou 5 (**E**) 2, 3 ou 5

Problemas de 5 pontos

21. Na tabela ao lado está representada a multiplicação dos números de 1 a 10. Qual é a soma dos 100 produtos da tabela completa?

$\times$	1	2	3	$\cdots$	10
1	1	2	3	$\cdots$	10
2	2	4	6	$\cdots$	20
$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$
10	10	20	30	$\cdots$	100

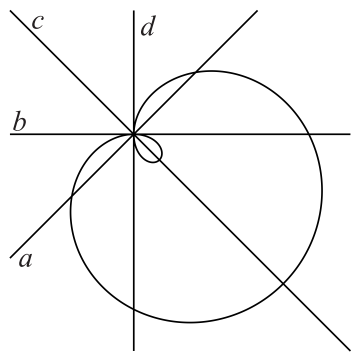
(**A**) 1000 (**B**) 2025

(**C**) 2500 (**D**) 3025

(**E**) 5500

22. Num referencial cartesiano ortonormado xOy, a curva da figura é descrita pela equação

$$(x^2 + y^2 - 2x)^2 = 2(x^2 + y^2).$$



Qual das retas a, b, c ou d representa o eixo dos yy?

(**A**) a (**B**) b

(**C**) c (**D**) d

(**E**) Nenhuma delas

23. Quando se lêem as afirmações seguintes, pela ordem (A), (B), (C), (D) e (E), qual é a primeira afirmação verdadeira?

(**A**) (C) é verdadeira (**B**) (A) é verdadeira (**C**) (E) é falsa

(**D**) (B) é falsa (**E**) $1 + 1 = 2$

24. Quantos polígonos regulares existem de modo a que a amplitude de cada um dos seus ângulos (em graus) seja um número inteiro?

(**A**) 17 (**B**) 18 (**C**) 22 (**D**) 25 (**E**) 60

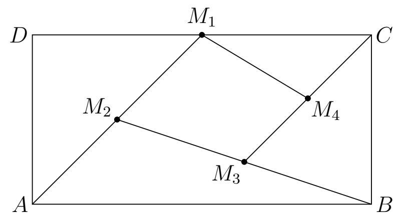
25. Quantos números inteiros positivos de 3 algarismos podem ser representados como a soma de exatamente nove potências naturais diferentes de base 2?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

26. Quantos triângulos $[ABC]$ com $A\widehat{B}C = 90°$ e $\overline{AB} = 20$ existem de modo a que as medidas de todos os lados sejam números inteiros?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 6

27. No retângulo $[ABCD]$ da figura, M_1 é o ponto médio de $[DC]$, M_2 é o ponto médio de $[AM_1]$, M_3 é o ponto médio de $[BM_2]$ e M_4 é o ponto médio de $[CM_3]$. Então, a razão entre as áreas do quadrilátero $[M_1M_2M_3M_4]$ e do retângulo $[ABCD]$ é:



(**A**) $\frac{7}{16}$ (**B**) $\frac{3}{16}$ (**C**) $\frac{7}{32}$ (**D**) $\frac{9}{32}$ (**E**) $\frac{1}{5}$

28. A Maria desenhou no quadro da escola retângulos azuis e vermelhos. Exatamente 7 dos retângulos são quadrados. Existem mais três retângulos vermelhos do que quadrados azuis. Existem mais 2 quadrados vermelhos do que retângulos azuis. Quantos retângulos azuis é que a Maria desenhou no quadro?

(**A**) 1 (**B**) 3 (**C**) 5 (**D**) 6 (**E**) 10

29. Os 96 membros do clube de contagem do Canguru estão sentados à volta de uma grande mesa circular. À vez, todos eles começam a contar os números 1, 2, 3, etc., de forma sequencial. Os membros que disserem um número par têm de sair da mesa e os restantes continuam a contar. Assim, na segunda volta a contagem começa no número 97. Eles continuam desta forma até restar apenas um membro na mesa. Qual foi o número que este membro disse na primeira volta?

(**A**) 1 (**B**) 17 (**C**) 33 (**D**) 65 (**E**) 95

30. Na palavra "KANGAROO", o Pedro e o João substituem as letras por algarismos, de modo a que os números resultantes tenham 8 algarismos ($K \neq 0$) e sejam múltiplos de 11. Cada um deles substitui letras diferentes por algarismos diferentes e letras iguais pelos mesmos algarismos. O Pedro obtém o maior número possível e o João o menor número possível. Uma das letras foi substituída pelo mesmo algarismo, por ambos os rapazes. Que algarismo é esse?

(**A**) 0 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 6