

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA B DO ENSINO

SECUNDÁRIO

(CÓDIGO DA PROVA 735) – 2ª FASE – 18 DE JULHO 2013

GRUPO I

1.1. Como o professor não abriu a porta com a primeira chave, ficou com duas chaves na mão com igual probabilidade de abrir a porta. Logo a probabilidade pedida é 0,5.

1.2. A variável aleatória X pode tomar os valores 1, 2 ou 3.

A probabilidade de abrir a porta à primeira tentativa é $\frac{1}{3}$.

A probabilidade de abrir a porta à segunda tentativa é $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$ porque corresponde ao acontecimento "não abrir à primeira tentativa e abrir à segunda tentativa".

A probabilidade de abrir a porta à terceira tentativa é $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 1$ porque corresponde ao acontecimento "não abrir à primeira tentativa e não abrir à segunda tentativa e abrir à terceira tentativa".

x_i	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Introduzindo esta tabela nas listas da calculadora, obtém-se $\sigma \approx 0,8$.

2. O número de peças em cada quadrado do tabuleiro é uma progressão geométrica, como primeiro termo 1 e razão 2. O número de peças necessárias para preencher metade do tabuleiro é a soma dos 32 primeiros termos dessa sucessão:

$$S = 1 \times \frac{1 - 2^{32}}{1 - 2} = 4\,294\,967\,295$$

Tendo em atenção que uma peça demora 2 segundos a colocar,

Em 1 minuto: 30 peças

Em 1 hora: $30 \times 60 = 1\,800$

Em 1 dia: $24 \times 1800 = 43\,200$

Em 1 ano: $365 \times 43200 = 15\,768\,000$

Em 100 anos: $100 \times 15768000 = 1\,576\,800\,000$

O Rui está correto porque o número de peças colocadas em 100 anos é menos de 2 mil milhões, muito inferior aos mais de 4 mil milhões necessários para cobrir metade do tabuleiro.

GRUPO II

- 1.1. O oitavo registo da temperatura foi feito $7 \times 5 = 35$ minutos depois do primeiro.

$$T(0) = 18 + 70$$

$$T(35) = 18 + 70 \times e^{-1,75}$$

$$T(35) - T(0) = 18 + 70 \times e^{-1,75} - (18 + 70) = -57,8358\dots$$

A variação da temperatura durante os 35 minutos foi de cerca de -58°C , a temperatura desceu cerca de 58° .

- 1.2. Se a taxa de variação instantânea da função T para $t=1$ é aproximadamente $-3,3^\circ\text{C}/\text{min}$, então, ao fim de um minuto após o primeiro registo a temperatura do chá está a decrescer a uma taxa de $3,3^\circ\text{C}$ por minuto.

- 2.1. Se a solução é neutra, então tem pH igual a 7.

$$-\log_{10}(x) = 7$$

$$\log_{10}(x) = -7$$

$$x = 10^{-7}$$

O valor obtido pelo aluno para a concentração de iões é $10^{-7}\text{mol}/\text{dm}^3$.

- 2.2. I) A água do mar tem uma concentração de 1×10^{-8}

$$y = -\log_{10}(10^{-8}) = 8$$

afirmação é verdadeira.

O pH da água do mar é superior 7, logo a

- II) A lixívia tem uma concentração de $3,16 \times 10^{-14}$

$$y = -\log_{10}(3,16 \times 10^{-14}) = 13,500\dots \text{ A afirmação é falsa}$$

- II) O chá tem uma concentração de $3,16 \times 10^{-6}$ e o sumo de limão tem uma concentração de $5,01 \times 10^{-3}$

Chá

$$y = -\log_{10}(3,16 \times 10^{-6})$$

$$y = 5,50031\dots$$

Sumo de limão

$$y = -\log_{10}(5,01 \times 10^{-3})$$

$$y = 2,30016\dots$$

O triplo de 2,3 é 6,9, por isso a afirmação é falsa.

GRUPO III

1. Área relvado = $\frac{1}{2} \times \text{área círculo de diâmetro PR} + \frac{1}{2} \times \text{área círculo de diâmetro RQ}$

$$\text{Área relvado} = \frac{1}{2} \times \pi \times \left(\frac{\overline{PR}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \times \pi \times \left(\frac{\overline{RQ}}{2}\right)^2$$

$$\text{Área relvado} = \frac{\pi}{8} \times \overline{PR}^2 + \frac{\pi}{8} \times \overline{RQ}^2$$

$$\text{Área relvado} = \frac{\pi}{8} \times (\overline{PR}^2 + \overline{RQ}^2)$$

Mas, o triângulo PRQ é retângulo, pelo teorema de Pitágoras $\overline{PR}^2 + \overline{RQ}^2 = \overline{PQ}^2$

Então

$$\text{Área relvado} = \frac{\pi}{8} \times 8^2 = 8\pi$$

- 2.1. Introduzindo na calculadora as funções $y_1 = 32 \cdot \text{sen } x \cdot \text{cos } x$ e $y_2 = 10$ obtivemos a seguinte representação gráfica



Utilizando a função Calc – Intersect da máquina, obtivemos os seguintes valores de α , que correspondem à área 10 m^2 . Por leitura do gráfico, tem-se que $A(\alpha) > 0$ quando

$$\alpha \in]0,38; 1,23[$$

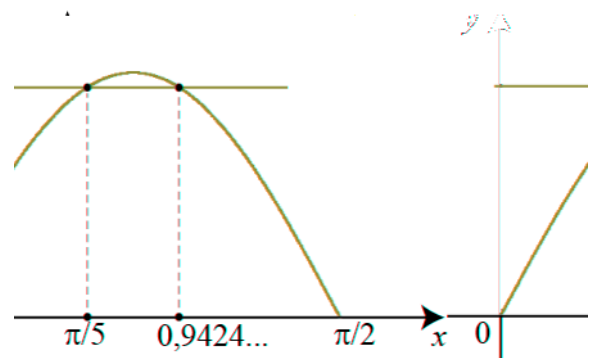
- 2.2. Para que a taxa de variação média seja 0 tem que se verificar $A\left(\frac{\pi}{5}\right) = A(c)$

Introduzindo na calculadora as funções

$$y_1 = 32 \cdot \text{sen } x \cdot \text{cos } x \quad \text{e} \quad y_2 = y_1\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

obtivemos a seguinte representação gráfica

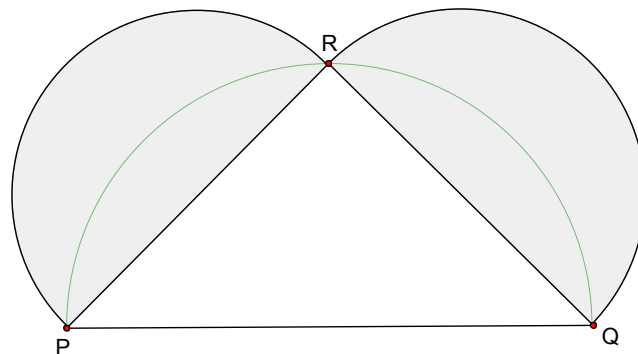
Utilizando a função Calc – Intersect da máquina, obtivemos $c \approx 0,94 \text{ rad}$.



2.3. $F(\alpha) > 0$ em $]0, \frac{\pi}{4}[$ significa que a função A é crescente neste intervalo, ou seja, para ângulos entre 0 e $\frac{\pi}{4}$ rad a área do relvado é tanto maior quanto maior for o ângulo.

$F(\alpha) < 0$ em $] \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$ significa que a função A é decrescente neste intervalo, ou seja, para ângulos entre $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{2}$ rad a área do relvado é tanto menor quanto maior for o ângulo.

Então a função A tem o seu máximo no zero da função F , ou seja, o relvado com a maior área corresponde ao ângulo de $\frac{\pi}{4}$ rad, que dá origem à figura em que o triângulo PQR é isósceles e os dois semi-círculos são iguais.



GRUPO IV

1.1. Para determinar a medida do ângulo interno do octógono regular, podemos dividi-lo em oito triângulos isósceles iguais, como na figura.

$$P\hat{O}Q = 360^\circ : 8 = 45^\circ$$

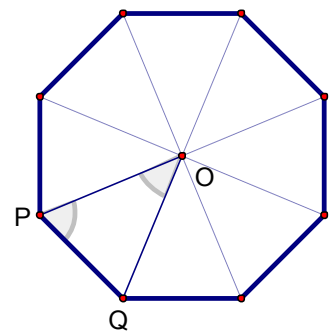
$$O\hat{P}Q = \frac{180^\circ - 45^\circ}{2} = \frac{135^\circ}{2}$$

O ângulo interno do octógono regular é $2 \times \frac{135^\circ}{2} = 135^\circ$.

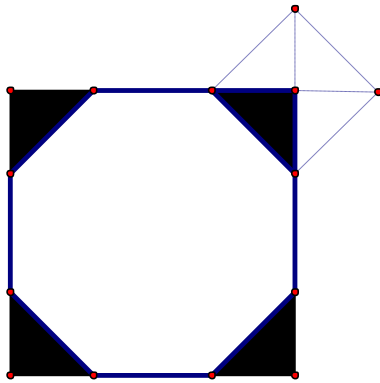
Se pavimentarmos com dois octógonos regulares, a soma dos dois ângulos em cada vértice é

$$2 \times 135^\circ = 270^\circ$$

portanto, o ângulo interno do terceiro polígono será $360^\circ - 270^\circ = 90^\circ$. Como o polígono é regular, tem os lados todos iguais e os ângulos de 90° , então é um quadrado.



- 1.2.1. O esquema do chão da sala pode ser dividido em $m \times n$ quadrados como o da figura, que contêm, cada um, um mosaico branco, octogonal e quatro quartos do mosaico preto, quadrado.



O lado de cada um destes quadrados é igual à soma do lado do octógono, 18 cm, com uma (duas metades) diagonal do quadrado, $18\sqrt{2}$ cm.

Então, convertendo as medidas do chão em cm:

$$(18 + 18\sqrt{2}) \times m = 1130 \quad e \quad (18 + 18\sqrt{2}) \times n = 1043$$

$$m = \frac{1130}{18 + 18\sqrt{2}} \quad e \quad n = \frac{1043}{18 + 18\sqrt{2}}$$

$$m = 26,003\dots \quad e \quad n = 24,001\dots$$

Então, o chão da Sala das Bicas pode ser dividido em $m \times n = 26 \times 24 = 624$ quadrados destes, logo necessita de 624 mosaicos brancos.

- 1.2.2. Como o número de mosaicos pretos (inteiros ou decompostos em partes) é igual ao número de quadrados calculados na alínea anterior, 624, e a área de cada mosaico preto, em m^2 é $0,18^2$, a área total dos mosaicos pretos é:

$$0,18^2 \times 624 = 20,2176$$

A área pedida é aproximadamente 20 m^2 .

2. Seja l o comprimento do lado do quadrado, em cm. Então o perímetro é $4l$ e a área é l^2 . Como estes três números estão em progressão aritmética, tem-se

$$l^2 - 4l = 4l - l$$

$$l^2 - 7l = 0$$

$$l(l - 7) = 0$$

$$l = 0 \quad \text{ou} \quad l = 7$$

O lado do quadrado mede 7 cm.

FIM