PROPOSTA DE TESTE INTERMÉDIO N.º 4

MATEMÁTICA A – 12.º ANO

"Conhece a Matemática e dominarás o Mundo."
Galileu Galilei

GRUPO I – ITENS DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1. Um grupo de dez pessoas vai ser dividido em dois grupos, um de quatro pessoas e outro de seis pessoas. O grupo de seis pessoas irá desempenhar tarefas indiferenciadas ao contrário do grupo de quatro pessoas que irá desempenhar tarefas diferenciadas.

De quantas maneiras distintas se podem formar os dois grupos?

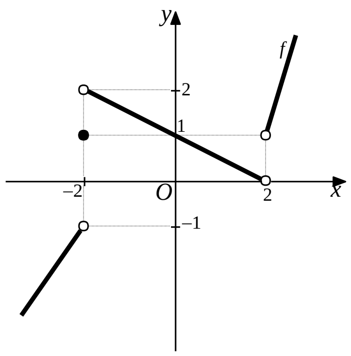
A 210 **B** 5040 **C** 151200 **D** 3628800

Exercício Extra: Suponha agora que o grupo vai ser dividido em dois grupos de cinco pessoas, ambos com tarefas indiferenciadas. De quantas maneiras distintas se podem formar os dois grupos?

2. Sejam a, b, c três números reais positivos tais que $\log_a\left(b^2\right)=c$. A expressão $\log_a b+\log_b\left(a^2\right)-\log_{\sqrt[3]{a}}\left(b^3\right)$ igual a:

A $\frac{(2-2c)(2+2c)}{c}$ **B** $\frac{(2-2c)^2}{c}$ **C** $\frac{(2-c)(2+c)}{c}$ **D** $\frac{(2-c)^2}{c}$

3. Na figura está representado, em referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função f de domínio $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.



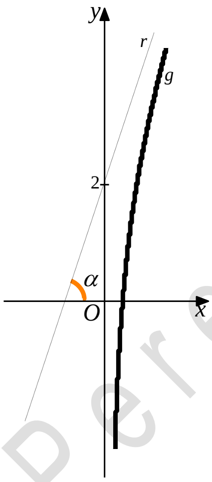
Seja (u_n) a sucessão definida por $u_n=\frac{\ln\left(\frac{1}{n}\right)}{n^{15}}$. Qual é o valor de $\lim f\left(-u_n-2\right)$?

A -1 **B** 0 **C** 1 **D** 2

4. Na figura está representado, em referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função g de domínio $\mathbb{R}^+$ e uma recta r, assimptota do gráfico de g.

Sabe-se que:

- α é a inclinação da recta r, com $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$;
- $\cos\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$;
- a recta r intersecta o eixo Oy no ponto de coordenadas $(0,2)$.



Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2}{g(x)} - x\right)$?

A -6 **B** $-\frac{2}{3}$ **C** $\frac{2}{3}$ **D** 6

5. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$, do tipo $f(x) = ax^2 + ax$ cujo gráfico tem a concavidade voltada para cima. Considere a função h, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = e^{-x} \times f(x)$.

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

A O gráfico de h tem a concavidade voltada para baixo em $[0,3]$.

B O gráfico de h tem a concavidade voltada para cima em $[0,2]$.

C O gráfico de h tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty,0]$ e em $[3,+\infty[$.

D O gráfico de h tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty,0]$ e em $[2,+\infty[$.

GRUPO II – ITENS DE RESPOSTA ABERTA

1. A distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é dada pela tabela:

x_i	1	2	3
$P(X = x_i)$	$P(A)$	$P(B)$	$P(A\|B)$

Sabendo que A e B dois acontecimentos contidos num espaço de resultados S, associado a uma experiência aleatória tais que $0 < P(A) < P(B)$, $P(A \cap B) = 0{,}09$ e $P(\overline{A}) = 3P(A)$, qual é o valor de $P(B)$?

2. Considere a função *f*, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x)=\begin{cases} x\ln x-2x & \text{se} \quad x\geq 1 \\ \dfrac{2e^{0,5-0,5x}}{x-2} & \text{se} \quad x<1 \end{cases}$$

2.1. Mostre que $f'(1)=-1$ e escreva uma equação vectorial da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1.

2.2. Seja $g(x)=\sqrt[3]{x^3-2x}$. Mostre que $(f\circ g)'(-1)=-\dfrac{1}{3}$

2.2. Estude a função f quanto à monotonia e existência de extremos relativos.

2.3. Determine $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ e conclua sobre a existência de assimptota horizontal do gráfico de f, quando $x\to-\infty$.

3. Seja g, a função de domínio $[-2\pi,+\infty[$, definida por:

$$g(x)=\begin{cases} \operatorname{sen} x+\cos(2x) & \text{se} \quad -2\pi\leq x\leq 0 \\ \dfrac{x^3+3x}{e-e^{ax+1}} & \text{se} \quad x>0 \end{cases}, \text{ com } a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

3.1. Determine a de modo que a função g seja contínua em todo o seu domínio.

3.2. Determine, no intervalo $[-2\pi,0]$, os zeros da função g.

3.3. Seja $\theta\in\left]-\dfrac{\pi}{2},0\right]$. Sabendo que $\operatorname{tg}\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=2$, determine $g\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)$.

4. Considere a função h, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, definida por $h(x)=x^3-6\ln\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

4.1. Estude a função h, quanto ao sentido das concavidades e à existência de pontos de inflexão do seu gráfico.

4.2. Mostre que o gráfico de h e a bissectriz dos quadrantes pares se intersectam pelo menos uma vez no intervalo $]0,2[$.

4.3. Considere a recta r definida por $2y-x=2$. A recta r intersecta o gráfico de h em três pontos A, B e C, sendo que A tem a menor abcissa e C tem a maior abcissa.

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, determine a área do triângulo $[AOC]$.

Na sua resposta deve:

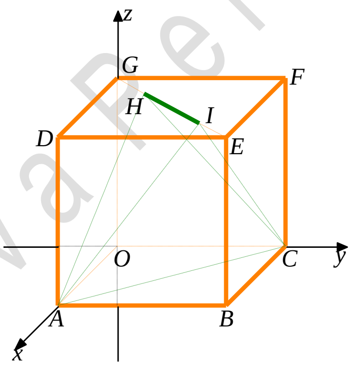
- reproduzir o(s) gráfico(s) (devidamente identificado(s)) que achar necessário(s) para a resolução do problema;

- indicar as coordenadas dos pontos A e C, arredondadas às milésimas;

- indicar a área do triângulo $[AOC]$, arredondada às décimas.

5. Na figura estão representados, num referencial $Oxyz$, um cubo $[OABCDEFG]$ e um tetraedro não regular $[ACHI]$.

Sabe-se que:



- os vértices A, C e G pertencem aos eixos, Ox, Oy e Oz, respectivamente;

- os vértices H e I pertencem à diagonal facial $[EG]$;

- $\overline{OA} = 4$ e $\overline{GH} = \overline{IE} = \sqrt{2}$

5.1. Escreva uma equação cartesiana do plano ACI.

5.2. Escolhem-se, simultaneamente e ao acaso, quatro dos dez vértices assinalados. Qual é a probabilidade de apenas dois serem vértices do cubo?