Proposta de Teste Intermédio – Matemática A 12.º ano

Nome da Escola	Ano letivo 20 - 20		Matemática A | 12.º ano
Nome do Aluno	Turma	N.º	Data
Professor			- - 20

GRUPO I

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla. Em cada um deles, são indicadas quatro opções, das quais só uma está correta.
- Escreva na sua folha de respostas apenas o número de cada item e a letra correspondente à opção que selecionar para responder a esse item.
- Não apresente cálculos, nem justificações.
- Se apresentar mais do que uma opção, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.

1. De uma função *f*, de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que:

- a derivada, f', e a segunda derivada, f'', estão definidas em todos os pontos do domínio de f;
- $f'(0)=0$;
- $f''(x)>0, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?

(A) $f(1)=f(-1)$

(B) $f(1)>0$

(C) $f(2)>f(1)$

(D) $f(1)>f(2)$

2. Considere a função *f*, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=1+e^x$.

Relativamente a esta função, pode afirmar que:

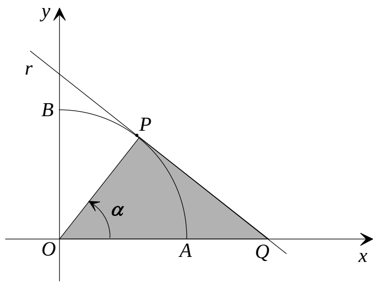
(A) $f(x)\times f(-x)=f(x)+f(-x)$

(B) $f(x)\times f(-x)=\left[f(x)\right]^2$

(C) $f(x)\times f(-x)=2f(x)$

(D) $f(x)\times f(-x)=3$

3. Na figura ao lado está representado, em referencial o. n. xOy, um arco AB contido numa circunferência de centro na origem do referencial.



Os pontos A e B têm coordenadas $(1,\ 0)$ e $(0,\ 1)$, respetivamente.

O ponto P desloca-se ao longo do arco AB, nunca coincidindo com o ponto A nem com o ponto B.

Para cada posição do ponto P, sabe-se que:

- a reta r é tangente à circunferência no ponto P;
- o ponto Q é o ponto de interseção da reta r com o eixo Ox;
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo AOP.

Qual é a expressão que representa a área do triângulo $[OQP]$ em função de α ?

(**A**) $\dfrac{1}{2\operatorname{tg}\alpha}$ (**B**) $\dfrac{\sin\alpha \times \cos\alpha}{2}$

(**C**) $\dfrac{\sin\alpha}{2}$ (**D**) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{2}$

4. Seja S o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória.

Sejam A e B acontecimentos com probabilidades iguais ($A \subset S$ e $B \subset S$).

Sabe-se que:

- $P(A \cap B) = 0,2$
- $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(A \cup B)$

Qual é o valor da probabilidade condicionada $P(A\,|\,B)$?

(**A**) $\dfrac{2}{5}$ (**B**) $\dfrac{1}{5}$

(**C**) $\dfrac{2}{3}$ (**D**) $\dfrac{1}{3}$

5. Seja *f* uma função de domínio $\mathbb{R}$, derivável em todos os pontos do domínio, tal que:

- $f(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$
- $f(1) = f'(1) = \mathrm{e}$

Considere a função *h*, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = f(x) \times \ln\left[f(x)\right]$.

O valor de $h'(1)$ é

(**A**) e (**B**) 2e (**C**) e^2 (**D**) 0

GRUPO II

Nas respostas aos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

A calculadora gráfica apenas pode se usada em eventuais cálculos numéricos.

Atenção: Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

---

1. Num saco estão seis bolas brancas e quatro bolas pretas, indistinguíveis ao tato.

1.1. Extraem-se ao acaso, sucessivamente e sem reposição, as dez bolas do saco.

Determine a probabilidade de as quatro bolas pretas **não** saírem todas seguidas (sair pelo menos uma bola branca entre duas bolas pretas).

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

1.2. Admita agora que, tomando como ponto de partida a constituição inicial, se colocaram mais algumas bolas pretas no saco.

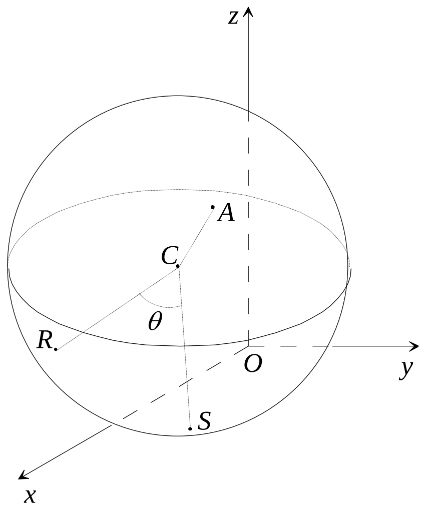
Considere a experiência aleatória que consiste em retirar, sucessivamente e sem reposição, duas bolas do saco e em registar a cor das bolas extraídas.

Relativamente a esta experiência aleatória considere os acontecimentos:

***A*:** «A primeira bola retirada é branca»
***B*:** «A segunda bola retirada é preta»

Sabendo que o valor da probabilidade condicionada $P(B|A)$ é $\frac{3}{4}$, determine o número de bolas pretas que foram posteriormente colocadas no saco.

2. Na figura seguinte, está representada, num referencial o. n. *Oxyz*, a superfície esférica de equação $(x-7)^2+(y-2)^2+(z-5)^2=27$.



Sabe-se que:

- o ponto C é o centro da superfície esférica;
- o ponto A tem coordenadas $(10,\ 5,\ 8)$;
- os pontos R e S pertencem à superfície esférica;
- θ designa a amplitude, em radianos, do ângulo RCS.

2.1. Mostre que o ponto A pertence à superfície esférica e determine as coordenadas do ponto B sabendo que $[AB]$ é um diâmetro dessa superfície.

2.2. Determine uma equação do plano tangente à superfície esférica no ponto A.

2.3. Sabe-se que $\operatorname{tg}\theta=\sqrt{8}$.

Determine o valor do produto escalar $\overrightarrow{CR}\cdot\overrightarrow{CS}$.

3. Seja *f* a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x)=\begin{cases} x^2\,\mathrm{e}^{x+1} & \text{se } x\leq 0 \\ x\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)+3x & \text{se } x>0 \end{cases}$$

3.1. Averigue se a função *f* é contínua em $x=0$.

3.2. Mostre que *f* tem um extremo relativo no intervalo $\left]-\infty\,,\ 0\right[$.

3.3. Determine $f'(-1)$ recorrendo à definição de derivada de uma função num ponto.

3.4. Seja *t* a reta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa -1.

3.4.1. Mostre que a equação reduzida da reta *t* é $y=-x$.

3.4.2. Mostre que existe um ponto do gráfico da função *f*, cuja abcissa pertence ao intervalo $x\in\left]-\frac{1}{2}\,,-\frac{1}{4}\right[$, em que a reta tangente ao gráfico nesse ponto é paralela à reta *t*.

Sugestão: Recorra ao Teorema de Bolzano.

3.5. O gráfico da função *f* tem uma assíntota oblíqua quando $x\to+\infty$.

Determine a equação reduzida dessa assíntota.

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I

1.	10 pontos
2.	10 pontos
3.	10 pontos
4.	10 pontos
5.	10 pontos
	50 pontos

GRUPO II

1.			
	1.1.		10 pontos
	1.2.		10 pontos
2.			
	2.1.		10 pontos
	2.2.		10 pontos
	2.3.		20 pontos
3.			
	3.1.		15 pontos
	3.2.		15 pontos
	3.3.		15 pontos
	3.4.		30 pontos
	3.4.1.	15 pontos	
	3.4.2.	15 pontos	
	3.5.		15 pontos
			150 pontos
		Total	200 pontos

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α *– amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r *– raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\dfrac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\dfrac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Sector circular:

$\dfrac{\alpha r^2}{2}$ (α *– amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r *– raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r *– raio da base;* g *– geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r *– raio*)

Volumes

Pirâmide: $\dfrac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Cone: $\dfrac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Esfera: $\dfrac{4}{3}\pi r^3$ (r *– raio*)

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\dfrac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ $(k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$