GRUPO I

1. Se $f''(x) > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$, então f' é estritamente crescente em $\mathbb{R}$.

Se f' é estritamente crescente em $\mathbb{R}$ e se $f'(0) = 0$, então $f'(x) > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^+$.

Se $f'(x) > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^+$, então f é estritamente crescente em $\mathbb{R}^+$.

Logo, $f(2) > f(1)$.

Resposta: (C)

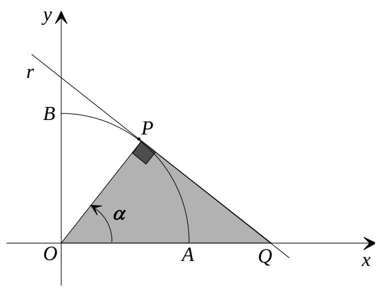
2.

$$
\begin{aligned}
f(x) \times f(-x) &= \left(1 + e^{x}\right)\left(1 + e^{-x}\right) \\
&= 1 + e^{-x} + e^{x} + e^{x}\, e^{-x} \\
&= 1 + e^{-x} + e^{x} + e^{x-x} \\
&= 1 + e^{-x} + e^{x} + e^{0} \\
&= 1 + e^{-x} + e^{x} + 1 \\
&= \left(1 + e^{x}\right) + \left(1 + e^{-x}\right) \\
&= f(x) + f(-x)
\end{aligned}
$$

Resposta: (A)

3. O triângulo $[OQP]$ é retângulo em P porque a reta tangente à circunferência no ponto P é perpendicular ao raio $[OP]$.

Portanto, no triângulo $[OQP]$ o segmento de reta $[PQ]$ é a altura relativa à base $[OP]$.



Logo, a área do triângulo $[OQP]$ é dada por:

$$A_{[OQP]} = \frac{\overline{OP} \times \overline{PQ}}{2}$$

Sabemos que $\overline{OP} = \overline{OA} = 1$. Atendendo a que o triângulo $[OQP]$ é retângulo em P, temos que:

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}} = \operatorname{tg} \alpha \Leftrightarrow \frac{\overline{PQ}}{1} = \operatorname{tg} \alpha \Leftrightarrow \overline{PQ} = \operatorname{tg} \alpha$$

Portanto, $A_{[OQP]} = \dfrac{1 \times \operatorname{tg} \alpha}{2} = \dfrac{\operatorname{tg} \alpha}{2}$.

Resposta: (D)

4. $P\left(\bar{A}\cup\bar{B}\right)=P(A\cup B)\Leftrightarrow P\left(\overline{A\cap B}\right)=P(A\cup B)$

$$\Leftrightarrow 1-P(A\cap B)=P(A\cup B)$$
$$\Leftrightarrow 1-0,2=P(A\cup B)$$
$$\Leftrightarrow P(A\cup B)=0,8$$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

Como $P(A\cap B)=0,2$, $P(A\cup B)=0,8$ e $P(A)=P(B)$, então:

$0,8=P(B)+P(B)-0,2\Leftrightarrow 2P(B)=1\Leftrightarrow P(B)=0,5$

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0,2}{0,5}=\frac{2}{5}$$

Resposta: (A)

5. $h(x)=f(x)\times\ln\left[f(x)\right]$

$h'(x)=\left[f(x)\times\ln\left(f(x)\right)\right]'=$

$$=f'(x)\times\ln\left(f(x)\right)+f(x)\times\left[\ln\left(f(x)\right)\right]'$$

$$=f'(x)\times\ln\left(f(x)\right)+f(x)\times\frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$=f'(x)\times\ln\left(f(x)\right)+f'(x)$$

Como $f(1)=f'(1)=\mathrm{e}$, então:

$h'(1)=f'(1)\times\ln\left(f(1)\right)+f'(1)=\mathrm{e}\times\ln\mathrm{e}+\mathrm{e}=\mathrm{e}\times1+\mathrm{e}=2\mathrm{e}$

Resposta: (B)

GRUPO II

1.

1.1. Começamos por calcular a probabilidade do acontecimento contrário (as quatro bolas pretas saírem todas seguidas).

Número de casos possíveis: $10!$

Número de casos favoráveis: $4!\times 6!\times 7$

$$P=\frac{4!\times 6!\times 7}{10!}=\frac{1}{30}$$

A probabilidade de as quatro bolas pretas **não** saírem todas seguidas é

$$P=1-\frac{1}{30}=\frac{29}{30}$$

1.2. Seja n o número de bolas pretas posteriormente colocadas no saco.

Bolas brancas: 6

Bolas pretas: $4 + n$

Total: $6 + 4 + n = 10 + n$

$$P(A) = \frac{6}{10+n}$$

$$P(B|A) = \frac{4+n}{9+n}$$ (após ser retirada uma bola branca ficaram na caixa $9 + n$ bolas sendo $4 + n$ pretas)

$$P(B|A) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{4+n}{9+n} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 16 + 4n = 27 + 3n \Leftrightarrow n = 11$$

Foram colocadas no saco 11 bolas pretas.

2. $(x-7)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 = 27$

$A(10,\ 5,\ 8)$; $C(7,\ 2,\ 5)$

2.1. $(10-7)^2 + (5-2)^2 + (8-5)^2 = 27 \Leftrightarrow 9+9+9 = 27 \Leftrightarrow 27 = 27$

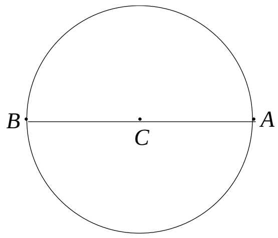
Logo, o ponto A pertence à superfície esférica.

$B = C + \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AC} = C - A = (7,\ 2,\ 5) - (10,\ 5,\ 8) = (-3,\ -3,\ -3)$

$\overrightarrow{AC} = (-3,\ -3,\ -3)$

$B = C + \overrightarrow{AC} = (7,\ 2,\ 5) + (-3,\ -3,\ -3) = (4,\ -1,\ 2)$



O ponto B tem coordenadas $(4,\ -1,\ 2)$.

2.2. O plano tangente à superfície esférica no ponto A é perpendicular ao raio $[AC]$. Portanto, o vetor $\overrightarrow{AC}$ é perpendicular a este plano pelo que uma equação que o define é da forma $-3x - 3y - 3z + d = 0$.

Como o ponto A pertence ao plano e tem coordenadas $(10,\ 5,\ 8)$, tem-se:

$-3 \times 10 - 3 \times 5 - 3 \times 8 + d = 0 \Leftrightarrow d = 69$

Assim, uma equação do plano tangente à superfície esférica no ponto A é:

$$-3x - 3y - 3z + 69 = 0 \Leftrightarrow x + y + z - 23 = 0$$

2.3. $\left\|\overrightarrow{CR}\right\| = \left\|\overrightarrow{CS}\right\| = \sqrt{27}$ (raio da superfície esférica)

$$\overrightarrow{CR} \cdot \overrightarrow{CS} = \left\|\overrightarrow{CR}\right\| \times \left\|\overrightarrow{CS}\right\| \times \cos\left(\overrightarrow{CR} \,\hat{,}\, \overrightarrow{CS}\right) = \sqrt{27} \times \sqrt{27} \times \cos\theta = 27\cos\theta$$

Se $\operatorname{tg}\theta = \sqrt{8}$, então $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

Como $\operatorname{tg}^2\theta + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}$, tem-se:

$$\left(\sqrt{8}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta} \Leftrightarrow 8 + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta} \Leftrightarrow 9 = \frac{1}{\cos^2\theta} \Leftrightarrow \cos^2\theta = \frac{1}{9}$$

Atendendo a que $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, então $\cos\theta = \frac{1}{3}$.

$$\overrightarrow{CR} \cdot \overrightarrow{CS} = 27\cos\theta = 27 \times \frac{1}{3} = 9$$

3. $$f(x) = \begin{cases} x^2 e^{x+1} & \text{se } x \le 0 \\ x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + 3x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

3.1. A função f é contínua no ponto $x = 0$ se existir $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ e se $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$

- $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \left(x^2 e^{x+1}\right) = 0 \times e^1 = 0$

- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left[x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + 3x\right] \overset{(0 \times \infty)}{=}$

$$= \lim_{x \to 0^+} \left[x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right] + \lim_{x \to 0^+} (3x)$$

$$= \lim_{y \to +\infty} \left[\frac{1}{y} \ln(1 + y)\right] + 0$$

$y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{y}$

Se $x \to 0^+$, $y \to +\infty$.

$$= \lim_{y \to +\infty} \frac{\ln(y+1)}{y} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{y \to +\infty} \frac{\ln\left[y\left(1 + \frac{1}{y}\right)\right]}{y} = \lim_{y \to +\infty} \frac{\ln y + \ln\left(1 + \frac{1}{y}\right)}{y}$$

$$= \lim_{y \to +\infty} \frac{\ln y}{y} + \lim_{y \to +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{y}\right)}{y} = 0 + \frac{0}{\infty} = 0$$

- $f(0) = 0^2 e^{0+1} = 0$

Logo, *f* é contínua no ponto $x = 0$.

3.2. No intervalo $]-\infty\,,\ 0[$ a função *f* é definida por $f(x) = x^2\,\mathrm{e}^{x+1}$.

$$f'(x) = 2x\mathrm{e}^{x+1} + x^2\,\mathrm{e}^{x+1} = x\mathrm{e}^{x+1}(2+x)$$

$$f'(x) = 0 \wedge x \in]-\infty\,,\ 0[\Leftrightarrow x\mathrm{e}^{x+1}(2+x) = 0 \wedge x \in]-\infty\,,\ 0[$$

$$\Leftrightarrow (x = 0 \vee 2 + x = 0) \wedge x \in]-\infty\,,\ 0[$$

$$\Leftrightarrow x = -2$$

x	$-\infty$	-2	0
f'	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$

f é estritamente crescente em $]-\infty\,,\ -2]$ e estritamente decrescente em $[-2,\ 0[$.

Logo, f tem um extremo relativo (máximo) para $x = -2$.

3.3.
$$f'(-1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(-1+h)^2\,\mathrm{e}^{(-1+h)+1} - 1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(h-1)^2\,\mathrm{e}^{h} - 1}{h} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(h^2 - 2h + 1)\mathrm{e}^{h} - 1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(h^2 - 2h)\mathrm{e}^{h} + \mathrm{e}^{h} - 1}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h(h-2)\mathrm{e}^{h}}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{e}^{h} - 1}{h} = \lim_{h\to 0}\left[(h-2)\mathrm{e}^{h}\right] + 1 = -2 + 1 = -1$$

3.4.

3.4.1. A reta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa -1 tem declive igual a $f'(-1)$.

Como $f'(-1) = -1$ a equação reduzida da reta *t* é da forma $y = -x + b$.

O ponto de tangência tem coordenadas $(-1,\ 1)$ porque $f(-1) = 1$.

Substituindo na equação $y = -x + b$, temos $1 = -(-1) + b \Leftrightarrow b = 0$.

Logo, a equação reduzida da reta *t* é $y = -x$.

3.4.2. Qualquer reta paralela a *t* tem declive -1.

Pretende-se provar que existe $x \in \left]-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right[$ tal que $f'(x) = -1$.

No intervalo $]-\infty, 0[$ a função f' é definida por $f'(x) = x\mathrm{e}^{x+1}(2+x)$.

- f' é uma função contínua em $]-\infty, 0[$ por ser definida pela soma, produto e composta de funções contínuas (funções polinomiais e função exponencial). Logo, f' é contínua em $\left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right]$.
- $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}+1}\left(2-\frac{1}{2}\right) \approx -1,24$

  $f'\left(-\frac{1}{4}\right) = \left(-\frac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}+1}\left(2-\frac{1}{4}\right) \approx -0,93$

  $-1,24 < -1 < -0,93$, ou seja, $f'\left(-\frac{1}{2}\right) < -1 < f'\left(-\frac{1}{4}\right)$

Então, pelo Teorema de Bolzano:

$$\begin{cases} f' \text{ é contínua em } \left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right] \\ f'\left(-\frac{1}{2}\right) < -1 < f'\left(-\frac{1}{4}\right) \end{cases} \Rightarrow \exists_{x \in \left]-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right[} : f'(x) = -1$$

3.5. $$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)+3x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)+3\right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+3 = \ln 1 + 3 = 0+3 = 3$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-3x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)+3x-3x\right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] = \lim_{y\to 0}\left[\frac{1}{y}\ln(1+y)\right] =$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y} = 1$$

$y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{y}$

Se $x \to +\infty$, $y \to 0$.

Logo, a reta de equação $y = 3x+1$ é uma assíntota oblíqua do gráfico de *f* quando $x \to +\infty$.