Novo Espaço – Matemática A 12.º ano
Preparação para o Teste Intermédio

Porto Editora

Nome: ____

Ano / Turma: _________ **N.º:** _____ **Data:** ___ / ____ / ___

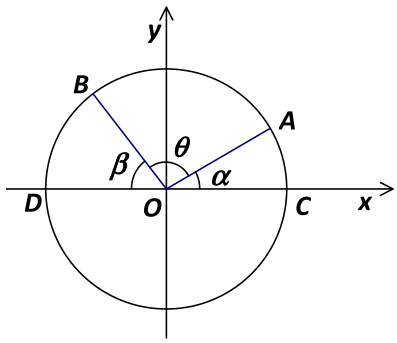
GRUPO I

• Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla. Em cada um deles, são indicadas quatro opções, das quais só uma está correta.
• Escreve na tua folha de respostas apenas o número de cada item e a letra correspondente à opção que selecionares para responder a esse item.
• Não apresentes cálculos nem justificações.
• Se apresentares mais do que uma opção, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.

1. Escolhem-se, ao acaso, três vértices distintos de uma pirâmide octogonal regular. Qual é a probabilidade de esses três vértices serem os vértices de uma face lateral da pirâmide?

(A) $\dfrac{{}^{8}C_3}{{}^{9}C_3}$ **(B)** $\dfrac{8}{{}^{9}C_3}$ **(C)** $\dfrac{1}{8}$ **(D)** $\dfrac{8\times 3!}{{}^{9}C_3}$

2. Na figura, está representada, em referencial o.n. *xOy*, uma circunferência definida pela equação $x^2+y^2=4$.



Sabe-se que:

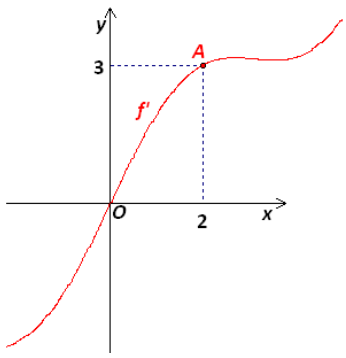
- os pontos A, B, C e D pertencem à circunferência, sendo C e D pontos do eixo das abcissas;
- $C\hat{O}A=\alpha$;
- $A\hat{O}B=\theta$;
- $B\hat{O}D=\beta$;
- $\overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{OB}=-\dfrac{1}{2}$ (produto escalar do vetor $\overrightarrow{OA}$ pelo vetor $\overrightarrow{OB}$).

Qual é o valor de $\sin(\alpha+\beta)$?

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **(B)** $\dfrac{1}{2}$ **(C)** $\dfrac{7}{8}$ **(D)** $\dfrac{3\sqrt{7}}{8}$

3. Sejam *f* e *g* duas funções de domínio $\mathbb{R}$, sendo $g(x)=\sqrt{x^2+3}$.
Na figura, em referencial o.n. *xOy*, está parte da representação gráfica da função f' (função derivada de *f*). O ponto $A(2,3)$ pertence ao gráfico de f'.

Qual é o valor de $(f\circ g)'(1)$?



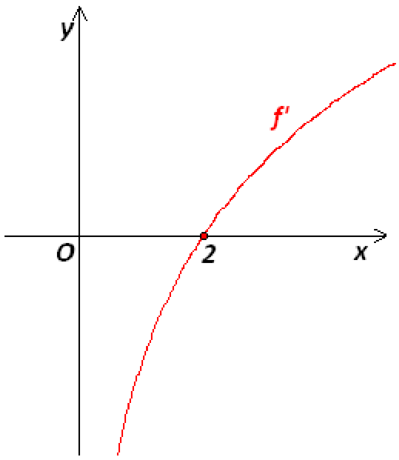
(A) $\dfrac{3}{2}$ **(B)** 3 **(C)** $2\sqrt{3}$ **(D)** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

4. Sabe-se que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x+k}-e^{k}}{3x}=4$.

Qual é o valor de *k*?

(A) $\ln(4)$ **(B)** e^4 **(C)** $\ln(6)$ **(D)** 1

5. Seja *f* uma função de domínio $\mathbb{R}^+$.



Na figura, está representada a função f', derivada de *f*.
Sabe-se que:

- 2 é um zero de f';
- a reta $x=0$ é uma assíntota do gráfico de f';
- f' é uma função estritamente crescente em $\mathbb{R}^+$.

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

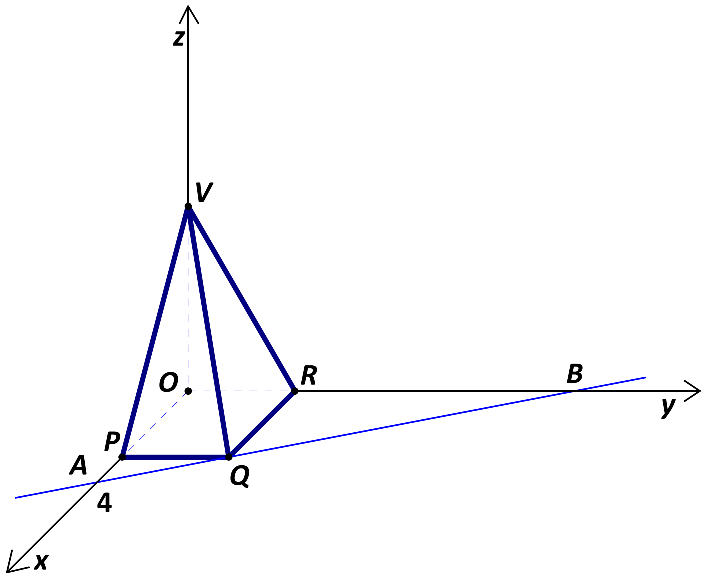
(A) $\left(f(2)-f(1)\right)\times f''(3)>0$ **(B)** $\dfrac{f(\pi)-f(3)}{f'(\pi)-f'(3)}<0$

(C) $f''(1)\times f''(3)>0$ **(D)** $f(2)\times f'(2)\times f''(2)<0$

GRUPO II

Nas respostas aos itens deste grupo apresenta todos os cálculos que tiveres de efetuar e todas as justificações necessárias.
Atenção: Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresenta sempre o valor exato.

1. Na figura, está representada uma pirâmide retangular $[OPQRV]$, em referencial o.n. $Oxyz$.



Sabe-se que:

- a reta AB é definida por $y=-\frac{3}{2}x+6 \quad \wedge \quad z=0$;
- o ponto P tem de coordenadas $(x,\ 0,\ 0)$, com $x \in \left]0, 4\right[$;
- o vértice V tem de coordenadas $(0,\ 0,\ 2x)$, com $x \in \left]0, 4\right[$;
- o ponto Q pertence à reta AB;
- o ponto R pertence a Oy;
- $PQ // Oy$ e $QR // Ox$.

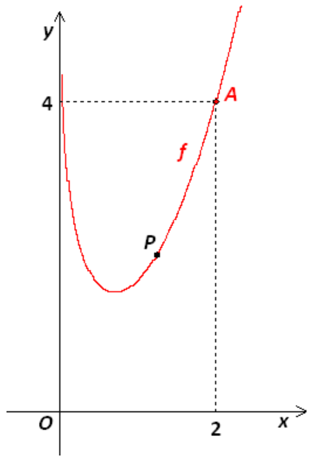
1.1. Seja g a função que a cada valor de x, abcissa do ponto P, faz corresponder o volume da pirâmide.
Mostra que: $g(x)=-x^3+4x^2 \quad \wedge \quad x \in \left]0,\ 4\right[$

1.2. Determina as coordenadas dos vértices da pirâmide que admite volume máximo.

2. Considera todos os números de três algarismos distintos que se podem formar com os algarismos: 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 .
Escolhe-se, ao acaso, um desses números.
Sejam os acontecimentos:
A: "o número é múltiplo de 5"
B: "a soma dos algarismos é um número ímpar"
Determina $P(B|A)$ (probabilidade condicionada). Apresenta o resultado na forma de fração irredutível.

3. Considera a função *f*, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x)=x^2+\ln\left(\dfrac{2}{x}\right)$.

Na figura, em referencial o.n. xOy, está parte da representação gráfica da função *f*.
O ponto $A(2,\ 4)$ pertence ao gráfico de *f*.



Resolve os itens seguintes recorrendo a métodos analíticos.

3.1. Seja θ a amplitude, em radianos, da inclinação da reta tangente ao gráfico de *f* no ponto *A*.
Mostra que $\sin\left(\dfrac{7\pi}{2}+2\theta\right)=\dfrac{45}{53}$.

3.2. Seja *P* um ponto de abcissa *x* que se desloca ao longo do gráfico de *f* e *g* a função que a cada *x*, abcissa de *P*, faz corresponder a soma das distâncias de *P* aos eixos coordenados.

3.2.1. Mostra que $g(1)=\ln\left(2e^2\right)$.

3.2.2. Determina a abcissa do ponto *P*, sabendo que a soma das distâncias de *P* aos eixos coordenados é mínima.

4. Seja *f* uma função de domínio $\mathbb{R}$, sendo $f'(x)=xe^{-3x}+x$.

4.1. Mostra que $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(\ln(2)+h)-f(\ln(2))}{h}=\dfrac{9\ln(2)}{8}$.

4.2. Seja *r* a reta definida pela equação $y=2x-5$. Mostra que existe um ponto do gráfico de *f*, de abcissa pertencente ao intervalo $]1,\ 2[$, em que a reta tangente ao gráfico nesse ponto é paralela à reta *r*.

5. Considera a família de funções *f*, de domínio $\mathbb{R}$, tais que:

$$f\left(x\right)=\begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{x+1}-\mathrm{e}}{x^2-x} & \text{se } x<0 \\ k & \text{se } x=0 \quad , \ k\in\mathbb{R} \\ 2x-\ln\left(2+\dfrac{1}{x}\right) & \text{se } x>0 \end{cases}$$

5.1. Determina *k* de modo que *f* seja contínua em $\left]-\infty,0\right]$.

5.2. Estuda a função *f* quanto à existência de assíntotas do seu gráfico.

5.3. Seja *h* a restrição de *f* a $\mathbb{R}^+$ e *g* a função definida por $g\left(x\right)=-\sqrt{x}$.

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora determina a área do triângulo [*AOB*], sabendo que a abcissa de *A* é zero da função *h* e *B* é o ponto de interseção dos gráficos de *h* e de *g*.
Apresenta o resultado arredondado às décimas.
Na resolução deste item deves:

- reproduzir, num referencial, os gráficos das funções *h* e *g* que visualizas na calculadora, considerando a janela em que $x\in\left[0,1\right]$ e $y\in\left[-1,1\right]$;
- indicar a abcissa do ponto *A*, arredondada às milésimas;
- indicar as coordenadas do ponto *B*, arredondadas às milésimas;
- indicar a área do triângulo [*OAB*] arredondada às décimas.

FIM

	Cotações											Total
Grupo I	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**							
	10	10	10	10	10							**50**
Grupo II	**1.1.**	**1.2.**	**2.**	**3.1**	**3.2.1**	**3.2.2**	**4.1**	**4.2**	**5.1.**	**5.2.**	**5.3.**	
	15	15	15	15	10	15	10	15	10	15	15	**150**
												200

FORMULÁRIO

GEOMETRIA

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\dfrac{Diagonal\ maior \times Diagonal\ menor}{2}$

Trapézio: $\dfrac{Base\ maior + Base\ menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: $Semiperímetro \times Apótema$

Setor circular: $\dfrac{\alpha r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$
(r – *raio da base;* g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$
(r – *raio*)

Volumes

Pirâmide: $\dfrac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Cone: $\dfrac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Esfera: $\dfrac{4}{3}\pi r^3$ (r – *raio*)

TRIGONOMETRIA

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$

COMPLEXOS

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis} \dfrac{\theta + 2k\pi}{n}$

$(k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

PROBABILIDADES

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1-\mu)^2 + \ldots + p_n (x_n-\mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

REGRAS DE DERIVAÇÃO

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

LIMITES NOTÁVEIS

$\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$