Proposta de Resolução

GRUPO I

1. Resposta (B)

Sendo a pirâmide octogonal há oito faces laterais.
Assim, do total de nove vértices, ao escolher três, há oito escolhas que correspondem a três vértices de uma face.
Quanto ao número de casos possíveis é dado por: ${}^9C_3$

A probabilidade pedida é: $P = \dfrac{8}{{}^9C_3}$

2. Resposta (D)

Raio da circunferência é 2.

$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \left\|\overrightarrow{OA}\right\| \times \left\|\overrightarrow{OB}\right\| \times \cos(\theta) = -\frac{1}{2}$$

Daqui resulta: $\cos\theta = \dfrac{-\frac{1}{2}}{2\times 2} = -\dfrac{1}{8}$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(180^\circ - \theta) = -\sin(\theta)$$

$$\cos\theta = -\frac{1}{8} \text{ e } 180^\circ < \theta < 90^\circ$$

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \Leftrightarrow \sin^2(\theta) = 1 - \frac{1}{64} \Leftrightarrow \sin^2(\theta) = \frac{63}{64}$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{63}}{8} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$$

3. Resposta (A)

$$g'(x) = \left(\sqrt{x^2+3}\right)' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} \quad ; \quad g(1) = \sqrt{4} = 2 \text{ e } g'(1) = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$$

$$(f \circ g)'(1) = f'(g(1)) \times g'(1) = f'(2) \times g'(1) = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

4. Resposta (C)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x+k} - e^k}{3x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^k\left(e^{2x}-1\right)}{3x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{2e^k}{3} \times \frac{e^{2x}-1}{2x}\right) = \frac{2e^k}{3}$$

$$\frac{2e^k}{3} = 4 \Leftrightarrow e^k = 6 \Leftrightarrow k = \ln(6)$$

5. Resposta (C)

Se f' é estritamente crescente em $\mathbb{R}^+$. A segunda derivada é positiva em $\mathbb{R}^+$.

$f''(1) \times f''(3) > 0$.

GRUPO II

1.1.

Coordenadas do ponto: $Q\left(x,\ -\frac{3}{2}x+6,\ 0\right)$

Área da base da pirâmide: $\overline{PQ}\times\overline{QR}=\left(-\frac{3}{2}x+6\right)\times x=-\frac{3}{2}x^2+6x$

Volume da pirâmide: $\frac{1}{3}\times\left(-\frac{3}{2}x^2+6x\right)\times 2x=-x^3+4x^2$

1.2.

$g(x)=-x^3+4x^2$

$g'(x)=\left(-x^3+4x^2\right)'=-3x^2+8x$

$g'(x)=0\Leftrightarrow -3x^2+8x=0\Leftrightarrow x(-3x+8)=0\Leftrightarrow x=0 \ \vee \ x=\frac{8}{3}$

	0		$\frac{8}{3}$		**4**
$g'(x)$		**+**	**0**	**–**	
$g(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

O volume é máximo se $x=\frac{8}{3}$.

Coordenadas dos vértices da pirâmide se $x=\frac{8}{3}$.

$O(0,0,0)$; $P\left(\frac{8}{3},0,0\right)$; $Q\left(\frac{8}{3},-\frac{3}{2}\times\frac{8}{3}+6,0\right)=\left(\frac{8}{3},2,0\right)$; $R(0,2,0)$ e

$V\left(0,0,2\times\frac{8}{3}\right)=\left(0,0,\frac{16}{3}\right)$.

2.

O número de números de três algarismos distintos é dado por: ${}^{7}A_3=7\times6\times5=210$
Número de três algarismos distintos em que o algarismo das unidades é 5:
${}^{6}A_2=6\times5=30$

O acontecimento $B\cap A$: “a soma dos três algarismos é um número ímpar sendo o algarismo das unidades 5”. Então, os algarismos das dezenas e das centenas devem ser ambos pares ou ambos ímpares (sendo 5 o algarismo das unidades).
O número de casos favoráveis ao acontecimento $B\cap A$ é dado por:
${}^{3}A_2+{}^{3}A_2=3\times2+3\times2=12$

$P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{\frac{12}{210}}{\frac{30}{210}}=\frac{12}{30}=\frac{2}{5}$. $P(B|A)=\frac{2}{5}$.

3.1. $f(x)=x^2+\ln\left(\frac{2}{x}\right)$

$$f'(x)=\left(x^2+\ln\left(\frac{2}{x}\right)\right)'=2x+\frac{\left(\frac{2}{x}\right)'}{\frac{2}{x}}=2x-\frac{2}{x^2}\times\frac{x}{2}=2x-\frac{1}{x}$$

$$f'(2)=2\times 2-\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$$

$$\operatorname{tg}(\theta)=\frac{7}{2}\quad\wedge\quad 0<\theta<\frac{\pi}{2}.$$

$$\sin\left(\frac{7\pi}{2}+2\theta\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{2}+2\theta\right)=-\cos(2\theta)=-\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)=$$

$$=-\left(\cos^2\theta-\left(1-\cos^2\theta\right)\right)=1-2\cos^2\theta$$

$$\sin\left(\frac{7\pi}{2}+2\theta\right)=1-2\cos^2\theta$$

Sabe-se que $1+\operatorname{tg}^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$

Atendendo a que $\operatorname{tg}(\theta)=\frac{7}{2}$, tem-se: $1+\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{1}{\cos^2\theta}$. Daqui resulta que $\cos^2\theta=\frac{4}{53}$.

Como $\sin\left(\frac{7\pi}{2}+2\theta\right)=1-2\cos^2\theta$, tem-se $\sin\left(\frac{7\pi}{2}+2\theta\right)=1-2\times\frac{4}{53}=\frac{45}{53}$.

$$\sin\left(\frac{7\pi}{2}+2\theta\right)=\frac{45}{53}$$

3.2.1.

$$P\left(x,\ x^2+\ln\left(\frac{2}{x}\right)\right)$$

$$g(x)=x+x^2+\ln\left(\frac{2}{x}\right)$$

$$g(1)=1+1^2+\ln\left(\frac{2}{1}\right)=2+\ln(2)=\ln\left(e^2\right)+\ln(2)=\ln\left(2e^2\right)$$

$$g(1)=\ln\left(2e^2\right)$$

3.2.2.

$$g(x)=x+x^2+\ln\left(\frac{2}{x}\right)$$

$$g'(x)=\left(x+x^2+\ln\left(\frac{2}{x}\right)\right)'=1+2x-\frac{2}{x^2}\times\frac{x}{2}=1+2x-\frac{1}{x}$$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow 1+2x-\frac{1}{x}=0 \Leftrightarrow \frac{x+2x^2-1}{x}=0 \Leftrightarrow 2x^2+x-1=0 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=-1 \ \vee \ x=\frac{1}{2}$$

x	0		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$

A soma das distâncias de P aos eixos coordenados é mínima se abcissa de P é $\frac{1}{2}$.

4.1.

$$f'(x)=xe^{-3x}+x$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\ln(2)+h)-f(\ln(2))}{h}=f'(\ln 2)$$

$$f'(\ln(2))=\ln(2)e^{-3\ln(2)}+\ln(2)=\ln(2)\times e^{\ln(2^{-3})}+\ln(2)=\ln(2)\times\frac{1}{8}+\ln(2)=\frac{9\ln(2)}{8}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\ln(2)+h)-f(\ln(2))}{h}=\frac{9\ln(2)}{8}$$

4.2. Existe uma reta tangente ao gráfico de *f*, num ponto de abcissa pertencente ao intervalo $]1, 2[$ e paralela à reta $y=2x-5$, se a equação $f'(x)=2$ é possível em $]1, 2[$.

O domínio de *f* é $\mathbb{R}$ e $f'(x)=xe^{-3x}+x$ .A função f' é contínua em $\mathbb{R}$, pois é o produto e a soma de funções contínuas em $\mathbb{R}$. Sendo contínua em $\mathbb{R}$, é contínua em $[1, 2]$.

. $f'(1)=e^{-3}+1=\frac{1}{e^3}+1$

$f'(1)<2$

. $f'(2)=2e^{-6}+2=\frac{2}{e^6}+2$

$f'(2)>2$

A função f' é contínua em $[1, 2]$ e 2 está entre $f'(1)$ e $f'(2)$. Por aplicação do Teorema de Bolzano, conclui-se que existe $c\in]1, 2[$, tal que $f'(c)=2$.

5.1. Se $x<0$, então $f(x)=\dfrac{e^{x+1}-e}{x^2-x}$, sendo contínua por ser o quociente de funções contínuas sendo o denominador diferente de 0.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{x+1}-e}{x^2-x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{e\left(e^x-1\right)}{x(x-1)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{e}{x-1}\times\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x-1}{x}=-e\times 1=-e$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=f(0)\Leftrightarrow -e=k$$

A função *f* é contínua em $]-\infty,0]$ se $k=-e$.

5.2.

. $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(2x-\ln\left(2+\dfrac{1}{x}\right)\right)=0-\infty=-\infty$

A reta $x=0$ é assíntota vertical do gráfico de *f*.

. Quando $x\to+\infty$

Se existir assíntota é do tipo $y=mx+b$

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(2-\frac{\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x}\right)=2-0=2$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)\right)=-\ln(2)$$

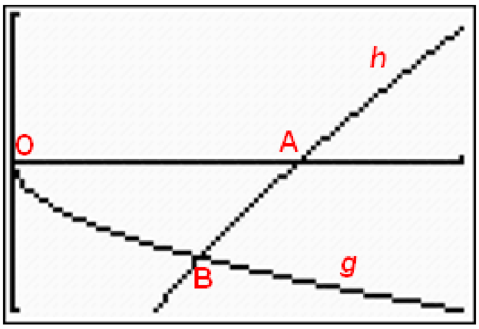
A reta $y=2x-\ln(2)$ é assíntota oblíqua do gráfico de *f*.

. Quando $x\to-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{x+1}-e}{x^2-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e\times e^x-e}{x(x+1)}=\frac{0-e}{+\infty}=0$$

A reta $y=0$ é assíntota horizontal do gráfico de *f*.

5.3. A seguir, considerando a janela $x\in[0,1]$ e $y\in[-1,1]$, estão representadas as funções *h* e *g* e assinalados os pontos *A* e *B* relevantes para a resolução deste item.



. Abcissa de *A* arredondada às milésimas:
$x_A=0,636$

. Coordenadas do ponto *B* arredondadas às milésimas: $x_B=0,417$ e $y_B=-0,646$

. Área do triângulo [*OAB*] é dada por:

$$\frac{x_A\times|y_B|}{2}=\frac{0,636\times 0,646}{2}$$

Área do triângulo [*OAB*] arredondada às décimas:
0,2