Associação de Professores de Matemática
Contactos:
Rua Dr. João Couto, n.º 27-A
1500-236 Lisboa
Tel.: +351 21 716 36 90 / 21 711 03 77
Fax: +351 21 716 64 24
http://www.apm.pt
email: geral@apm.pt

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA A DO ENSINO SECUNDÁRIO

(CÓDIGO DA PROVA 635) – 1ª FASE – 26 DE JUNHO 2014

Grupo I

Questões	1	2	3	4	5	6	7	8
Versão 1	C	A	C	B	B	D	C	D
Versão 2	B	D	B	C	B	C	A	C

Grupo II

1.

1.1. Seja $w_1 = -1 + \sqrt{3}\, i$

Tem-se que:

- $|w_1| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$
- sendo θ um argumento de w_1, como $\theta \in 2^{\text{o}}$ quadrante e $tg\ \theta = -\sqrt{3}$, vem $\theta = \frac{2\pi}{3}$

Assim $w_1 = 2cis\frac{2\pi}{3}$

Considerando $w_2 = 1 - i$, tem-se:

- $|w_2| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$
- sendo α um argumento de w_2, como $\alpha \in 4^{\text{o}}$ quadrante e $tg\ \alpha = -1$, vem $\alpha = -\frac{\pi}{4}$

Logo $w_2 = \sqrt{2}cis\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

Substituindo vem:

$$z_1=\frac{\left(-1+\sqrt{3}\ i\right)^3}{1-i}=\frac{\left(2cis\frac{2\pi}{3}\right)^3}{\sqrt{2}cis\left(-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{8cis\left(2\pi\right)}{\sqrt{2}cis\left(-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{8}{\sqrt{2}}cis\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{8\sqrt{2}}{2}cis\left(\frac{\pi}{4}\right)=4\sqrt{2}cis\frac{\pi}{4}$$

$$z_1\times z_2^2=4\sqrt{2}cis\frac{\pi}{4}\times\left(cis\alpha\right)^2=4\sqrt{2}cis\frac{\pi}{4}\times cis\left(2\alpha\right)=4\sqrt{2}cis\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)$$

Para que $z_1\times\left(z_2\right)^2$ seja um imaginário puro, $\frac{\pi}{4}+2\alpha$ tem de ser da forma $\frac{\pi}{2}+k\pi \quad \left(k\in\mathbf{Z}\right)$.

Ora $\frac{\pi}{4}+2\alpha=\frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow \pi+8\alpha=2\pi+4k\pi \Leftrightarrow 8\alpha=\pi+4k\pi \Leftrightarrow \alpha=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}$

Pretende-se que α pertença ao intervalo $\left[0,\pi\right[$. Para isso, deve considerar-se k=0 e k=1.

Vem então $\alpha=\frac{\pi}{8}$ e $\alpha=\frac{5\pi}{8}$.

1.2. Sabe-se que $\left|z\right|^2=z\times\overline{z}, \quad \forall z\in\mathbb{C}$. Assim,

$$\left|1+z\right|^2+\left|1-z\right|^2\leq 10 \Leftrightarrow \left(1+z\right)\left(\overline{1+z}\right)+\left(1-z\right)\left(\overline{1-z}\right)\leq 10 \Leftrightarrow \left(1+z\right)\left(1+\overline{z}\right)+\left(1-z\right)\left(1-\overline{z}\right)\leq 10 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1+z+\overline{z}+z\times\overline{z}+1-z-\overline{z}+z\times\overline{z}\leq 10 \Leftrightarrow 2+2z\times\overline{z}\leq 10 \Leftrightarrow z\times\overline{z}\leq 4 \Leftrightarrow \left|z\right|^2\leq 4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -2\leq\left|z\right|\leq 2 \Leftrightarrow \left|z\right|\leq 2$$

E assim se concluiu o pretendido.

2.

2.1. Dado o acontecimento B: "*As três bolas retiradas não têm a mesma cor*" o acontecimento contrário é: $\overline{B}$: "*As três bolas retiradas têm a mesma cor*".

Ora o acontecimento $\overline{B}$ ocorre apenas quando as três bolas retiradas tiverem cor preta. Atendendo a que a extração das três bolas é simultânea, o número de casos possíveis é dado por ${}^9C_3$ e o número de casos favoráveis à ocorrência de $\overline{B}$ é igual ${}^6C_3$.

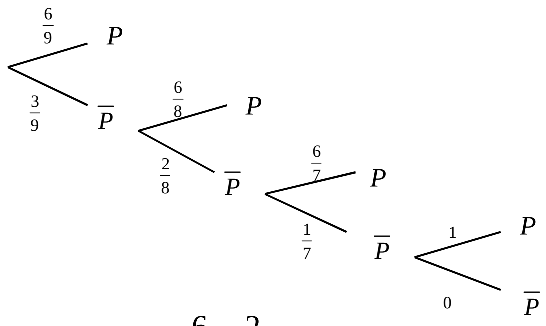
Assim, $$P\left(B\right)=1-P\left(\overline{B}\right)=1-\frac{{}^6C_3}{{}^9C_3}=1-\frac{5}{21}=\frac{16}{21}$$

Conclui-se então que a probabilidade de as bolas retiradas não serem todas da mesma cor é $\frac{16}{21}$.

2.2.

Do enunciado retiramos que os valores da variável X são: 1, 2, 3 e 4.

Seja P o acontecimento "*sair bola preta*". Para determinar a probabilidade de cada um dos valores da variável, consideremos o seguinte diagrama:



$$P(X=1)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$$

$$P(X=2)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$

$$P(X=3)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{6}{7}=\frac{2}{28}=\frac{1}{14}$$

$$P(X=4)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{7}\times 1=\frac{1}{84}$$

Assim, a tabela de distribuição da variável *X* é:

x_i	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{84}$

3. *P*(*A*|*B*) designa a probabilidade de o acontecimento *A* ocorrer sabendo que *B* já ocorreu, isto é, a probabilidade de o nº registado no primeiro lançamento ser negativo, sabendo que o produto dos números registados nos dois lançamentos é positivo.

   Ora se o produto dos nºs registados nos dois lançamentos é positivo isso significa que esses números são ambos positivos ou ambos negativos. Vamos determinar o nº de casos possíveis com recurso a uma tabela de dupla entrada:

x	-1	1	2	3
-1	+	-	-	-
1	-	+	+	+
2	-	+	+	+
3	-	+	+	+

   Admitindo que o acontecimento *B* se realizou, sabemos que o produto dos números registados nos dois lançamentos é positivo, pelo que existem 10 casos possíveis, dos quais apenas um é favorável à realização do acontecimento *A*, ou seja há apenas um caso em que o nº registado no primeiro lançamento é negativo.

   De acordo com a lei de Laplace o valor pedido é: $P(A\mid B)=\frac{1}{10}$.

4. O ângulo AHC é o ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{HC}$ e $\overrightarrow{HA}$.

   Como o ponto *A* pertence ao semieixo positivo *Ox* as suas coordenadas são $(a,0,0)$, com $a>0$

   Como a aresta do cubo é 3 o ponto *A* tem coordenadas $(3,0,0)$.

Dado que o ponto C pertence ao semieixo negativo Oy e a aresta do cubo é 3 as suas coordenadas são $(0,-3,0)$.

Como α é a amplitude do ângulo AHC tem-se que:

$$\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{HA}=\left\|\overrightarrow{HC}\right\|\times\left\|\overrightarrow{HA}\right\|\times\cos\alpha \Leftrightarrow \cos\alpha=\frac{\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{HA}}{\left\|\overrightarrow{HC}\right\|\times\left\|\overrightarrow{HA}\right\|}.$$

Por outro lado tem-se:

$\overrightarrow{HC}=C-H=(0,-3,0)-(3,-2,3)=(-3,-1,-3)$;

$\overrightarrow{HA}=A-H=(3,0,0)-(3,-2,3)=(0,2,-3)$;

$\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{HA}=(-3,-1,-3)\cdot(0,2,-3)=0-2+9=7$;

$\left\|\overrightarrow{HC}\right\|=\sqrt{(-3)^2+(-1)^2+(-3)^2}=\sqrt{19}$ e $\left\|\overrightarrow{HA}\right\|=\sqrt{0^2+2^2+(-3)^2}=\sqrt{13}$.

Assim vem,

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{HA}}{\left\|\overrightarrow{HC}\right\|\times\left\|\overrightarrow{HA}\right\|}\Leftrightarrow \cos\alpha=\frac{7}{\sqrt{19}\times\sqrt{13}}\Leftrightarrow \cos\alpha=\frac{7}{\sqrt{247}}.$$

Como $sen^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, vem $sen^2\alpha+\left(\frac{7}{\sqrt{247}}\right)^2=1\Leftrightarrow sen^2\alpha=1-\frac{49}{247}\Leftrightarrow sen^2\alpha=\frac{198}{247}$.

5.

5.1.

A função *f* é contínua em $x=4$ se, e só se, $\lim\limits_{x\to4^-}f(x)=\lim\limits_{x\to4^+}f(x)=f(4)$.

Comecemos por calcular os limites laterais:

$$\lim_{x\to4^+}f(x)=\lim_{x\to4^+}\left(\ln\left(2e^x-e^4\right)\right)=\ln\left(2e^4-e^4\right)=\ln\left(e^4\right)=4.$$

$$\lim_{x\to4^-}f(x)=\lim_{x\to4^-}\left(\frac{e^{x-4}-3x+11}{4-x}\right)$$; indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$

Fazendo a mudança de variável: $y=x-4\Leftrightarrow x=y+4$.

Como $x\to4^-$ então $y\to0^-$ e assim,

$$\lim_{x\to4^-}f(x)=\lim_{x\to4^-}\left(\frac{e^{x-4}-3x+11}{4-x}\right)=\lim_{x\to4^-}\left(\frac{e^{x-4}-3x+11}{-(x-4)}\right)=\lim_{y\to0^-}\left(\frac{e^y-3(y+4)+11}{-y}\right)=$$

$$=\lim_{y\to0^-}\left(\frac{e^y-1-3y}{-y}\right)=\lim_{y\to0^-}\left(-\frac{e^y-1}{y}+3\right)$$

Atendendo a que o limite da soma é igual à soma dos limites das parcelas, quando estes existem vem:

$$\lim_{y\to 0^-}\left(-\frac{e^y-1}{y}+3\right)=\lim_{y\to 0^-}\left(-\frac{e^y-1}{y}\right)+\lim_{y\to 0^-}(3)=-1+3=2\ .$$

Então $\lim_{x\to 4^-} f(x)=2$

Concluímos então que $\lim_{x\to 4^-} f(x)\neq \lim_{x\to 4^+} f(x)$

Portanto f não é contínua em $x=4$ porque os limites laterais são diferentes.

5.2.

Como o gráfico de f admite uma assíntota de equação $y=x+b$, com $b\in \mathbb{R}$, quando $x\to+\infty$, o declive da assíntota é $m=1$, pelo que

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(2e^x-e^4\right)-x\right)$$

$$\begin{aligned}
b=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(2e^x-e^4\right)-x\right) &=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(2e^x-e^4\right)-\ln e^x\right)\\
&=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(\frac{2e^x-e^4}{e^x}\right)\right)\\
&=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(2-\frac{e^4}{e^x}\right)\right)\\
&=\ln\left(2-\frac{e^4}{+\infty}\right)\\
&=\ln(2-0)\\
&=\ln 2
\end{aligned}$$

Então, $b=\ln 2$.

6.

6.1. $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2x-\pi}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}\times\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}\right)$$

Como $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}\right)=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ e $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-sen\left(2\times\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-sen(\pi)=\frac{\pi}{2}$ tem-se:

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}\times\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$. Assim, $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2x-\pi}\right)=\frac{\pi}{4}$

6.2.

Para efetuar o estudo das concavidades do gráfico de f determinemos a expressão analítica da segunda derivada de *f*.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(x - sen(2x)\right)' \\ &= (x)' - \left(sen(2x)\right)' \\ &= 1 - (2x)' \times \cos(2x) \\ &= 1 - 2\cos(2x) \end{aligned}$$

Determinemos os zeros da segunda derivada de f no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right[$.

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 &\Leftrightarrow 1 - 2\cos(2x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos(2x) = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \cos(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee 2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbf{Z} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbf{Z} \end{aligned}$$

Como se pretendem os zeros de f'' no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right[$ devemos considerar k=0.

As soluções da equação $f''(x) = 0$ são: $-\frac{\pi}{6}$ e $\frac{\pi}{6}$.

Estudemos o sinal de f''

x	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$
f''	n.d.	+	0	–	0	+	n.d.
f	n.d.	$\cup$	P.I.	$\cap$	P.I.	$\cup$	n.d.

Por observação da tabela, conclui-se que o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $\left]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}\right[$ e em $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right[$ e tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $\left]-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right[$.

O gráfico de f tem dois pontos de inflexão de abcissas $-\frac{\pi}{6}$ e $\frac{\pi}{6}$.

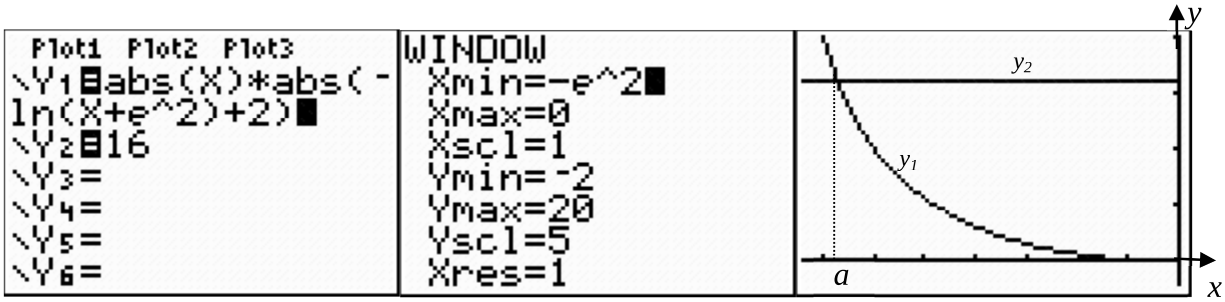
7. De acordo com o enunciado, o triângulo $[ABC]$ é retângulo em C.

Assim, designando por x a abcissa do ponto B, a área do triângulo $[ABC]$ é dada, em função de x, por:

$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{BC} \times \overline{AC}}{2} \Leftrightarrow 8 = \frac{|x| \times |f(x)+2|}{2} \Leftrightarrow 16 = |x| \times \left|-\ln\left(x+e^2\right)+2\right|,$$

com $x \in \left]-e^2, 0\right[$, pois a abcissa de B é negativa.

Recorrendo à calculadora gráfica, pretendemos determinar o valor de $x \in \left]-e^2, 0\right[$ que verifica a condição: $|x| \times \left|-\ln\left(x+e^2\right)+2\right| = 16$ (*)



O valor de x que verifica a condição (*), corresponde à abcissa a, do ponto de interseção dos gráficos das funções designadas por y_1 e y_2, com $a \approx -6,71$.

A abcissa do ponto B é aproximadamente -6,71.

FIM