

12MatA_1_prop_2013-2014

Grupo I

	1	2	3	4	5	6	7	8
Versão 1	C	A	C	B	B	D	C	D
Versão 2	B	D	B	C	B	C	A	C

Grupo II

1.

1.1

C.A. 1

$$z_1 = \frac{\left(2\operatorname{cis}\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right)^3}{\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{8\operatorname{cis}(2\pi)}{\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = 4\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{9}{4}\pi\right) = 4\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

C.A. 2

$$w = -1 + \sqrt{3}i \quad (-1, \sqrt{3}) \in 2.^\circ Q$$

$$|w| = 2$$

$$\operatorname{tg} \theta = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg}\left(\frac{2}{3}\pi\right) \Leftrightarrow \theta = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi, k \in Z$$

C.A. 3

$$v = 1 - i \quad (1, -1) \in 4.^\circ Q$$

$$|v| = \sqrt{2}$$

$$\operatorname{tg} \theta = -1 \Leftrightarrow \operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in Z$$

$$z_1 \times (z_2)^2 = 4\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \operatorname{cis}(2\alpha) = 4\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha\right)$$

Para que $z_1 \times (z_2)^2$ seja um imaginário puro é necessário que:

$$\frac{\pi}{4} + 2\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z \Leftrightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in Z$$

Dado que $\alpha \in [0, \pi[$ temos:

$$\text{Se } k = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{8}$$

$$\text{Se } k = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{5\pi}{8}$$

Resposta: $\frac{\pi}{8}$; $\frac{5\pi}{8}$.

1.2

$$\begin{aligned} |1+z|^2 + |1-z|^2 &\leq 10 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow |z+1|^2 + |z-1|^2 &\leq 10 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(\sqrt{(x+1)^2 + y^2}\right) + \left(\sqrt{(x-1)^2 + y^2}\right) &\leq 10 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 + x^2 - 2x + 1 + y^2 &\leq 10 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 &\leq 8 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 &\leq 4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow |z|^2 &\leq 2^2 \Leftrightarrow |z| \leq 2 \end{aligned}$$

2.

$$9 \text{ bolas} \begin{cases} 6 \text{ pretas} \\ 2 \text{ brancas} \\ 1 \text{ amarela} \end{cases}$$

2.1

$$\begin{aligned} P(\text{"n\~ao terem todas a mesma cor"}) &= 1 - P(\text{"as tr\~es retiradas s\~ao pretas"}) = \\ &= 1 - \frac{{}^6C_3}{{}^9C_3} = \frac{16}{21} \end{aligned}$$

2.2

x_i	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{84}$

$$\sum P(X = x_i) = 1$$

$$P(X = 1) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$P(X = 2) = \frac{3 \times 6}{9 \times 8} = \frac{1}{4}$$

$$P(X = 3) = \frac{3 \times 2 \times 6}{9 \times 8 \times 7} = \frac{1}{14}$$

$$P(X = 4) = \frac{3 \times 2 \times 1 \times 6}{9 \times 8 \times 7 \times 6} = \frac{1}{84}$$

3.

No contexto do problema:

$P(A|B)$ significa a probabilidade do número registado no 1.º lançamento ser negativo sabendo que o produto dos números registados nos dois lançamentos é positivo.

Nos casos possíveis temos que considerar duas situações: saírem nos dois lançamentos dois números positivos **ou** dois números negativos. Assim o número de casos possíveis é igual a $3^2 + 1^2 = 10$.

Nos casos favoráveis como tem que sair número negativo no primeiro lançamento, ou seja, -1 obrigatoriamente para que o produto seja positivo no segundo lançamento tem que sair número negativo, ou seja, -1 . Assim o único caso favorável é $(-1, -1)$.

$$\therefore P(A|B) = \frac{1}{10}$$

4.

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \\ &= \frac{(0, 2, -3) \cdot (-3, -1, -3)}{\sqrt{2^2 + 3^2} \times \sqrt{3^2 + 1^2 + 3^2}} = \\ &= \frac{-2 + 9}{\sqrt{13} \times \sqrt{19}} = \frac{7}{\sqrt{247}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \operatorname{sen}^2 \alpha &= 1 - \cos^2 \alpha = \\ &= 1 - \frac{49}{247} = \frac{198}{247} \end{aligned}$$

$$\vec{u} = \vec{HA} \quad A(3, 0, 0)$$

$$\vec{v} = \vec{HC} \quad C(0, -3, 0)$$

$$\vec{u} = \vec{HA} = A - H =$$

$$= (3, 0, 0) - (3, -2, 3) =$$

$$= (0, 2, -3)$$

$$\vec{v} = \vec{HC} = C - H =$$

$$= (0, -3, 0) - (3, -2, 3) =$$

$$= (-3, -1, -3)$$

5.

5.1

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{e^{x-4} - 3x + 11}{4 - x} &\stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} - \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{e^y - 3(y+4) + 11}{y} = - \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{e^y - 1 - 3y}{y} = \\ &= - \left(\lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{e^y - 1}{y} - \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{3y}{y} \right) = -(1 - 3) = 2 \end{aligned}$$

$$\lim_{y \rightarrow 4^+} \ln(2e^x - e^4) = \ln e^4 = 4$$

Como $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) \neq \lim_{y \rightarrow 4^+} f(x)$, logo f não é contínua em $x = 4$.

5.2

$$\begin{aligned} b &= \lim_{y \rightarrow +\infty} [\ln(2e^x - e^4) - x] \stackrel{(\infty - \infty)}{=} \lim_{y \rightarrow +\infty} [\ln(e^x(2 - e^{4-x})) - x] = \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} [\ln e^x + \ln(2 - e^{4-x}) - x] = \lim_{y \rightarrow +\infty} [x + \ln(2 - e^{4-x}) - x] = \\ &= \ln(2 - 0) = \ln 2 \end{aligned}$$

$$b = \ln 2$$

6. $f'(x) = x - \text{sen}(2x)$

6.1

$$\lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2x - \pi} = \frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \times f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \text{sen}\pi \right) = \frac{\pi}{4}$$

6.2

$$\begin{aligned} f'(x) &= x - \text{sen}(2x), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \\ \Rightarrow f''(x) &= 1 - 2\cos(2x), \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$f'''(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee 2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Em } \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} \right[: x = -\frac{\pi}{6} \vee x = \frac{\pi}{6} \quad (\text{para } k = 0)$$

x	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$
f''		+	0	-	0	+	
f		∪	P. I.	∩	P. I.	∪	

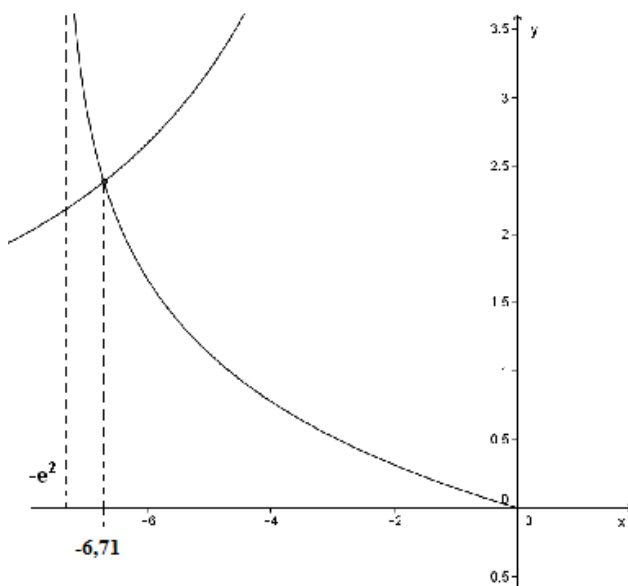
O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $\left] -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6} \right[$ e em $\left] \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4} \right[$ e

tem a concavidade voltada para baixo em $\left] -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \right[$; $x = -\frac{\pi}{6}$ e $x = \frac{\pi}{6}$ são as abscissas dos pontos de inflexão.

7)

$$A(x) = \frac{(2 - \ln(x + e^2))(-x)}{2}, \quad -e^2 < x < 0$$

$$A(x) = 8 \Leftrightarrow 2 - \ln(x + e^2) = -\frac{16}{x}, \quad -e^2 < x < 0 \Leftrightarrow x \approx -6,71$$



No referencial estão representados os gráficos das funções

$$y_1 = 2 - \ln(x + e^2) \quad \text{e}$$

$$y_2 = -\frac{16}{x}$$

cujo ponto de interseção corresponde à solução da equação dada.