EXAME 2014 – 1.ª FASE, VERSÃO 1 – PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

GRUPO I – ITENS DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1. Tem-se que $P(A)=0,4 \Leftrightarrow P(\bar{A})=1-0,4 \Leftrightarrow P(\bar{A})=0,6$. Assim:

$$P(B|\bar{A})=0,8 \Leftrightarrow \frac{P(B\cap\bar{A})}{P(\bar{A})}=0,8 \Leftrightarrow P(B\cap\bar{A})=0,8\times 0,6 \Leftrightarrow P(B\cap\bar{A})=0,48$$

Como $P(B\cap\bar{A})=P(B)-P(A\cap B)$, vem $P(B)-P(A\cap B)=0,48 \Leftrightarrow P(B)-0,2=0,48 \Leftrightarrow P(B)=0,68$

Resposta: C

2. Vamos começar por escolher seis posições entre as dez para colocar os algarismos 2. O número de maneiras de o fazer é ${}^{10}C_6$. Para cada uma das quatro posições restantes podemos colocar qualquer um dos restantes oito algarismos (os restantes algarismos podem-se repetir, por exemplo, o número 2829922229 satisfaz as condições deste problema). Assim, as restantes quatro posições podem ser ocupadas de ${}^{8}A'_4=8^4$.

Portanto, existem ${}^{10}C_6\times 8^4$ números nas condições do enunciado.

Resposta: A

3. Tem-se que $\lim x_n=\lim\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{+\infty}}=\frac{1}{+\infty}=0^+$. Assim, pela definição de limite segundo Heine, vem:

$$\lim\frac{2}{f(x_n)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2}{f(x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2}{e^{\frac{1}{x}}-3}=\frac{2}{e^{\frac{1}{0^+}}-3}=\frac{2}{e^{+\infty}-3}=\frac{2}{+\infty-3}=\frac{2}{+\infty}=0$$

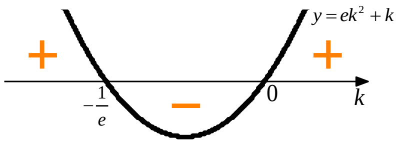
Resposta: C

4. A função f é contínua em $\mathbb{R}$, pois é soma entre funções contínuas em $\mathbb{R}$. Portanto também é contínua em $[0,1]\subset\mathbb{R}$. Assim, a função f tem um zero em $]0,1[$ se $f(0)\times f(1)<0$:

$$f(0)\times f(1)<0 \Leftrightarrow (ke^0+0)\times(ke^1+1)<0 \Leftrightarrow k(ke+1)<0 \Leftrightarrow ek^2+k<0$$

Tem-se $ek^2+k=0 \Leftrightarrow k(ke+1)=0 \Leftrightarrow k=0 \quad\vee\quad ke+1=0 \Leftrightarrow k=0 \quad\vee\quad k=-\frac{1}{e}$

Como a função $y = ek^2 + k$ é quadrática e o seu gráfico tem a concavidade voltada para cima, então as soluções da inequação $ek^2 + k < 0$ são os valores de k tais que $k \in \left]-\frac{1}{e}, 0\right[$.



Outra resolução: Tem-se que $f(0) = ke^0 + 0 = k$ e $f(1) = ke^1 + 1 = ke + 1$. Se $k > 0$, então $f(0) = k > 0$ e $f(1) = ke + 1 > 0$ e portanto, o corolário do Teorema de Bolzano não garante a existência de um zero de f em $]0,1[$. Assim, k é necessariamente negativo. Logo, $f(0) = k$ é negativo e portanto $f(1) = ke + 1 > 0$. Então:

$$k < 0 \quad \wedge \quad ke + 1 > 0 \Leftrightarrow k < 0 \quad \wedge \quad k > -\frac{1}{e} \Leftrightarrow k \in \left]-\frac{1}{e}, 0\right[$$

Resposta: B

5. Tem-se que $f(x) = a + \ln\left(\frac{a}{x}\right) = a + \ln a - \ln x$. Logo, $f'(x) = -\frac{1}{x} < 0$ e $-\frac{1}{x} < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$. A única opção onde pode estar representado o gráfico de f' é a $\boxed{\text{B}}$.

Resposta: B

6. Como a reta r é perpendicular ao plano α se um vetor diretor da reta r for colinear com um vetor normal do plano α. Um vetor normal do plano α pode ser $\vec{n}_\alpha = (4, 0, -1)$. Assim, a única opção onde pode estar representada a reta r é a $\boxed{\text{D}}$, pois um vetor diretor da reta definida por $\frac{x-3}{4} = -z \quad \wedge \quad y = 1$ é $\vec{r} = (4, 0, -1)$.

Resposta: D

7. As coordenadas do ponto B são dadas por $(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$, assim como $\cos\alpha < 0$ e $\operatorname{sen}\alpha > 0$, pois $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, vem $\overline{BC} = \operatorname{sen}\alpha$ e $\overline{OC} = -\cos\alpha$. Logo:

$$A_{[BCD]} = \frac{\overline{CD} \times \overline{BC}}{2} = \frac{1}{2}\left(\overline{OD} - \overline{OC}\right) \times \overline{BC} = \frac{1}{2}\left(3 - (-\cos\alpha)\right)\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{2}(3 + \cos\alpha)\operatorname{sen}\alpha$$

Resposta: C

8. O polígono $[ABCDEF]$ é um hexágono regular, portanto os seus vértices são as imagens geométricas das raízes sextas de z. Além disso, $A\hat{O}B = B\hat{O}C = \ldots = F\hat{O}A = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$. Como $C\left(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right)$, C é a imagem geométrica de $-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i$. Assim:

$$\left|-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i\right| = \sqrt{\left(-2\sqrt{2}\right)^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{2\times 4+2\times 4} = \sqrt{16} = 4$$

Seja θ um argumento de $-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i$. Tem-se $\operatorname{tg}\theta = \frac{2\sqrt{2}}{-2\sqrt{2}} = -1$ e $\theta \in 2.^{\text{o}}Q$. Logo, $\theta = -\frac{\pi}{4}+\pi = \frac{3\pi}{4}$ e portanto $-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i = 4\operatorname{cis}\frac{3\pi}{4}$.

Assim, o número complexo cuja imagem geométrica é o vértice E é $4\operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{4}+2\times\frac{\pi}{3}\right) = 4\operatorname{cis}\frac{17\pi}{12}$.

Resposta: D

GRUPO II – ITENS DE RESPOSTA ABERTA

1.

1.1.

- $\left|-1+\sqrt{3}i\right| = \sqrt{(-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = 2$. Seja θ um argumento de $-1+\sqrt{3}i$. Tem-se $\operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$ e $\theta \in 2.^{\text{o}}Q$. Logo, $\theta = -\frac{\pi}{3}+\pi = \frac{2\pi}{3}$.

- $|1-i| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$. Seja θ um argumento de $1-i$. Tem-se $\operatorname{tg}\theta = \frac{-1}{1} = -1$ e $\theta \in 4.^{\text{o}}Q$. Logo, $\theta = -\frac{\pi}{4}$.

Assim:

$$z_1 \times (z_2)^2 = \frac{\left(2\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}\right)^3}{\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)} \times (\operatorname{cis}\alpha)^2 = \frac{2^3\operatorname{cis}\left(\cancel{3}\times\frac{2\pi}{\cancel{3}}\right)}{\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)} \times \operatorname{cis}(2\alpha) = \frac{8}{\sqrt{2}}\operatorname{cis}\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right) \times \operatorname{cis}(2\alpha) =$$

$$= \frac{8}{\sqrt{2}}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4} \times \operatorname{cis}(2\alpha) = \frac{8}{\sqrt{2}}\operatorname{cis}\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$$

$z_1 \times (z_2)^2$ é um imaginário puro se o seu argumento for da forma $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Assim:

$$2\alpha + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Logo, $\alpha = \frac{\pi}{8}$ $(k = 0)$ ou $\alpha = \frac{5\pi}{8}$ $(k = 1)$.

1.2. Seja $z = a + bi$ com $a, b \in \mathbb{R}$. Tem-se:

$$|1+z|^2 + |1-z|^2 \leq 10 \Leftrightarrow |1+a+bi|^2 + |1-a-bi|^2 \leq 10 \Leftrightarrow \left(\sqrt{(1+a)^2 + b^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(1-a)^2 + (-b)^2}\right)^2 \leq 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + \cancel{2a} + a^2 + b^2 + 1 - \cancel{2a} + a^2 + b^2 \leq 10 \Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 \leq 8 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \leq 4$$

Como $a^2 + b^2 \geq 0$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ e $4 > 0$, então $a^2 + b^2 \leq 4 \Leftrightarrow \underbrace{\sqrt{a^2 + b^2}}_{|z|} \leq \sqrt{4} \Leftrightarrow |z| \leq 2$.

Outra resolução: Tendo em conta que $|z|^2 = z \times \bar{z}$ e $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$, $\forall z, w \in \mathbb{R}$, vem:

$$|1+z|^2 + |1-z|^2 \leq 10 \Leftrightarrow (1+z)\overline{(1+z)} + (1-z)\overline{(1-z)} \leq 10 \Leftrightarrow (1+z)\left(\bar{1} + \bar{z}\right) + (1-z)\left(\bar{1} - \bar{z}\right) \leq 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1+z)(1+\bar{z}) + (1-z)(1-\bar{z}) \leq 10 \Leftrightarrow 1 + \cancel{\bar{z}} + \cancel{z} + z \times \bar{z} + 1 - \cancel{\bar{z}} - \cancel{z} + z \times \bar{z} \leq 10 \Leftrightarrow 2z \times \bar{z} \leq 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |z|^2 \leq 4 \Leftrightarrow |z|^2 \leq 2^2 \underset{|z| \geq 0}{\Leftrightarrow} |z| \leq 2$$

2.

2.1. Para resolver este item, vamos utilizar o acontecimento contrário. O acontecimento contrário a A: «as três bolas retiradas não são todas da mesma cor» é $\bar{A}$: «as três bolas retiradas são todas da mesma cor».

O número de casos possíveis é ${}^9C_3$, das noves bolas escolhem-se três. O número de casos favoráveis ao acontecimento «as três bolas retiradas são todas da mesma cor» é ${}^6C_3$, das seis bolas pretas escolhem-se três (para se retirarem três bolas da mesma cor estas só podem ser pretas, pois só há duas brancas e uma amarela).

Portanto, a probabilidade pedida é $P(A) = 1 - P\left(\bar{A}\right) = 1 - \frac{{}^6C_3}{{}^9C_3} = \frac{16}{21}$.

2.2. Até sair uma bola preta, podem ser retiradas, uma, duas, três ou quatro bolas. Portanto, a variável aleatória X pode tomar os valores 0, 1, 2 e 3, isto é $X=\{1,2,3,4\}$. Assim:

- $P(X=1)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$ (a primeira bola retirada é logo uma de cor preta)
- $P(X=2)=\frac{3}{9}\times\frac{6}{8}=\frac{18}{72}=\frac{1}{4}$ (a primeira bola retirada não é preta e a segunda é preta)
- $P(X=3)=\frac{3}{9}\times\frac{2}{8}\times\frac{6}{7}=\frac{36}{504}=\frac{1}{14}$ (a primeira bola e a segunda bolas retiradas não são pretas e a terceira é preta)
- $P(X=4)=\frac{3}{9}\times\frac{2}{8}\times\frac{1}{7}\times\frac{6}{6}=\frac{6}{504}=\frac{1}{84}$ (a primeira bola, segunda e terceiras bolas retiradas não são pretas e a quarta é preta)

Logo, a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é dada por:

x_i	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{84}$

3. No contexto do problema $P(A|B)$ designa a probabilidade de o número registado no primeiro lançamento ser negativo, sabendo que o produto dos números registados nos dois lançamentos é positivo. Assim, se o produto dos dois números registados nos dois lançamentos é positivo, então ou os dois números são positivos ou os dois números são negativos. Portanto o número de casos possíveis é $3\times3+1\times1=10$ (podem ter saído as combinações $(1,1)$, $(1,2)$, $(1,3)$, $(2,1)$, $(2,2)$, $(2,3)$, $(3,1)$, $(3,2)$, $(3,3)$ ou $(-1,-1)$). O número de casos favoráveis é 1, sair a combinação $(-1,-1)$, é a única combinação em que o número registado no primeiro lançamento é negativo. Logo, pela regra de Laplace $P(A|B)=\frac{1}{10}$.

4. α é a amplitude do ângulo AHC, ou seja, é a amplitude entre os vetores $\overrightarrow{HA}$ e $\overrightarrow{HC}$. Assim:

$$\cos\alpha=\cos\left(\overrightarrow{HA}\,\hat{}\,\overrightarrow{HC}\right)=\frac{\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HC}}{\left\|\overrightarrow{HA}\right\|\times\left\|\overrightarrow{HC}\right\|}$$

Como $\overrightarrow{HA}=A-H=(3,0,0)-(3,-2,3)=(0,2,-3)$ e $\overrightarrow{HA}=C-H=(0,-3,0)-(3,-2,3)=(-3,-1,-3)$, vem:

$$\cos\alpha=\frac{(0,2,-3)\cdot(-3,-1,-3)}{\|(0,2,-3)\|\times\|(-3,-1,-3)\|}=\frac{0-2+9}{\sqrt{0^2+2^2+(-3)^2}\times\sqrt{(-3)^2+(-1)^2+(-3)^2}}=\frac{7}{\sqrt{13}\times\sqrt{19}}=\frac{7}{\sqrt{247}}$$

Portanto:

$$\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1\Leftrightarrow\operatorname{sen}^2\alpha=1-\cos^2\alpha\Leftrightarrow\operatorname{sen}^2\alpha=1-\left(\frac{7}{\sqrt{247}}\right)^2\Leftrightarrow\operatorname{sen}^2\alpha=1-\frac{49}{247}\Leftrightarrow\operatorname{sen}^2\alpha=\frac{198}{247}$$

5.

5.1. A função f é contínua em $x=4$ se $\lim\limits_{x\to4^-}f(x)=\lim\limits_{x\to4^+}f(x)=f(4)$. Assim:

- $$\lim_{x\to4^-}f(x)=\lim_{x\to4^-}\frac{e^{x-4}-3x+11}{4-x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{i)}{=}}\lim_{y\to0^-}\frac{e^y-3(y+4)+11}{4-(y+4)}=\lim_{y\to0^-}\frac{e^y-3y-12+11}{\cancel{4}-y-\cancel{4}}=\lim_{y\to0^-}\frac{e^y-1-3y}{-y}=$$

$$=\lim_{y\to0^-}\frac{e^y-1}{-y}-\lim_{y\to0^-}\frac{3\cancel{y}}{-\cancel{y}}=-\lim_{y\to0^-}\frac{e^y-1}{y}-\frac{3}{-1}=-1+3=2$$

i) Mudança de variável: Se $x\to4^-$ então $x-4\to0^-$. Seja $y=x-4\Leftrightarrow x=y+4$, $y\to0^-$.

- $$\lim_{x\to4^+}f(x)=\lim_{x\to4^+}\ln\left(2e^x-e^4\right)=\ln\left(2e^4-e^4\right)=\ln\left(e^4\right)=4$$

- $$f(4)=\ln\left(2e^4-e^4\right)=\ln\left(e^4\right)=4$$

Logo, como $\lim\limits_{x\to4^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to4^+}f(x)$, f não é contínua em $x=4$.

5.2. Como a reta de equação $y=x+b$, com $b\in\mathbb{R}$ é uma assíntota oblíqua do gráfico de f, quando $x\to+\infty$. Assim, o declive da assíntota é igual a 1, pelo que b é dado por:

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(2e^x-e^4\right)-x\right)\overset{(\infty-\infty)}{=}\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(e^x\left(2-\frac{e^4}{e^x}\right)\right)-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(e^x\right)+\ln\left(2-e^{4-x}\right)-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\cancel{x}+\ln\left(2-e^{4-x}\right)-\cancel{x}\right)=\ln\left(2-e^{4-\infty}\right)=$$

$$=\ln\left(2-e^{-\infty}\right)=\ln(2-0)=\ln 2$$

Logo, $b=\ln 2$.

Outra resolução:

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(2e^x-e^4\right)-x\right)\overset{(\infty-\infty)}{=}\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(2e^x-e^4\right)-\ln\left(e^x\right)\right)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{2e^x-e^4}{e^x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{2\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}}-\frac{e^4}{e^x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(2-e^{4-x}\right)=\ln\left(2-e^{-\infty}\right)=\ln(2-0)=\ln 2$$

6.

6.1. Tem-se que $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}$. Assim:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2x-\pi}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{1}{2}\times\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\times f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{sen}\left(2\times\frac{\pi}{2}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{sen}(\pi)\right)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=\frac{\pi}{4}$$

6.2.

- $f''(x)=1-2\cos(2x)$

- $f''(x)=0\Leftrightarrow 1-2\cos(2x)=0\Leftrightarrow\cos(2x)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{3}+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}\quad\vee\quad 2x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}\quad\vee\quad x=-\frac{\pi}{6}+k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}$$

Para $x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right[$ tem-se $x=-\frac{\pi}{6}\quad\vee\quad x=\frac{\pi}{6}\ (k=0)$

Fazendo um quadro de variação do sinal da função f'', vem:

x	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$
$f''(x)$	n.d.	$+$	0	$-$	0	$+$	n.d.
$f(x)$	n.d.	$\cup$	p.i.	$\cap$	p.i.	$\cup$	n.d.

Para $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right[$, o gráfico da função f tem a concavidade votada para baixo em $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$, tem a concavidade votada para cima em $\left]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}\right]$ e em $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right[$ e tem pontos de inflexão em $x = -\frac{\pi}{6}$ e em $x = \frac{\pi}{6}$.

7.

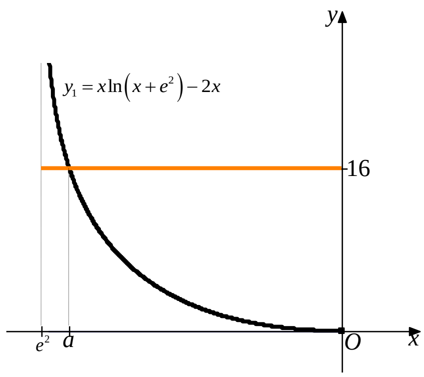
▪ Como o ponto B pertence ao gráfico de f e tem abcissa negativa, as suas coordenadas são do tipo $(x, f(x))$, com $x \in \left]e^2, 0\right[$. Assim, $\overline{BC} = -x$ e $\overline{AC} = f(x) - (-2) = f(x) + 2 = 2 - \ln\left(x + e^2\right)$. Portanto, a área do triângulo $[ABC]$, em função de x, é dada por:

$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{BC} \times \overline{AC}}{2} = \frac{-x\left(2 - \ln\left(x + e^2\right)\right)}{2} = \frac{x\ln\left(x + e^2\right) - 2x}{2}$$

▪ A abcissa do ponto B é o valor de $x \in \left]e^2, 0\right[$ tal que:

$$A_{[ABC]} = 8 \Leftrightarrow \frac{x\ln\left(x + e^2\right) - 2x}{2} = 8 \Leftrightarrow x\ln\left(x + e^2\right) - 2x = 16$$

Utilizando o editor de funções da calculadora, define-se $y_1 = x\ln\left(x + e^2\right) - 2x$ e $y_2 = 16$ na janela de visualização $\left[-e^2, 0\right] \times [0, 20]$



Logo, $x\ln\left(x + e^2\right) - 2x = 16 \Leftrightarrow x = a$, com $a \approx -6,71$.

Portanto, a abcissa do ponto B é, aproximadamente, $-6,71$.