

# Prova final de MATEMÁTICA - 3º ciclo 2015 - Época especial

Proposta de resolução

---

## Caderno 1

---

1. Como foi escolhido um dos convidados que gostam de gelatina, existem 8 escolhas possíveis (a Ana, o Paulo, o Rui, a Maria, o José, a Rosa, o Tomé e o Tiago).  
Destes 8, apenas 3 gostam de *mousse* de chocolate (a Ana, o Paulo e o Rui).

Desta forma, recorrendo à Regra de Laplace, existem 8 casos favoráveis para os convidados que gostam de gelatina e 3 casos possíveis para que um desses convidados também goste de *mousse* de chocolate, pelo que a probabilidade é  $p = \frac{3}{8} = 0,375$ .

Escrevendo a probabilidade na forma de percentagem, temos  $p = 37,5\%$

Resposta: **Opção B**

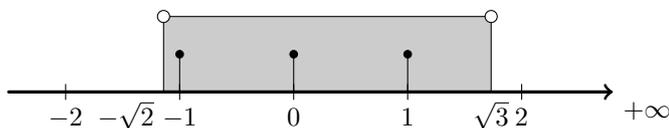
2. Como a média das idades dos quatro filhos do casal Martins é igual a 12,25 anos, designando por  $S_M$  a soma das idades dos quatro filhos do casal Martins, temos que

$$\frac{S_M}{4} = 12,25 \Leftrightarrow S_M = 12,25 \times 4 \Leftrightarrow S_M = 49$$

Calculando o valor exato da média das idades dos cinco jovens,  $\bar{x}$ , vem

$$\bar{x} = \frac{S_M + 13}{5} = \frac{49 + 13}{5} = \frac{62}{5} = 12,4 \text{ anos}$$

3. Como  $-\sqrt{2} \approx -1,414$  e  $\sqrt{3} \approx 1,732$ , representando na reta real o intervalo  $]-\sqrt{2}, \sqrt{3}[$ , e os números inteiros que pertencem a este conjunto, temos:



Assim, podemos verificar que o conjunto dos números inteiros que pertencem ao intervalo  $]-\sqrt{2}, \sqrt{3}[$  é

$$\{-1, 0, 1\}$$



4.

- 4.1. Como a reta  $TP$  é tangente à circunferência no ponto  $T$  é perpendicular ao raio  $[CT]$ , e por isso, o triângulo  $[CTP]$  é retângulo em  $T$

Assim, recorrendo ao Teorema de Pitágoras, podemos afirmar que

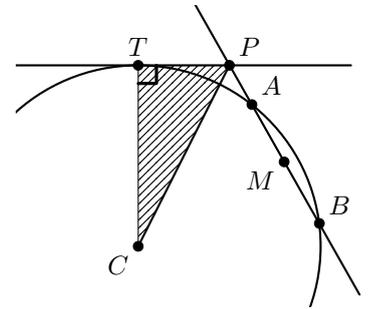
$$\overline{CP}^2 = \overline{CT}^2 + \overline{PT}^2$$

E substituindo os valores conhecidos, vem que:

$$\begin{aligned} \overline{CP}^2 &= 9,2^2 + 4^2 \Leftrightarrow \overline{CP}^2 = 84,64 + 16 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \overline{CP}^2 &= 100,64 \underset{\overline{CP} > 0}{\Rightarrow} \overline{CP} = \sqrt{100,64} \end{aligned}$$

Escrevendo o resultado arredondado às unidades, temos

$$\overline{CP} = \sqrt{100,64} \approx 10$$



- 4.2. Como  $M$  é o ponto médio da corda  $[AB]$ , temos que  $\overline{AM} = \overline{MB}$ , e assim

$$\overline{PB} = \overline{PA} + \overline{AM} + \overline{MB} = \overline{PA} + 2 \times \overline{MB}$$

Logo, substituindo os valores conhecidos, vem

$$\overline{PB} = \overline{PA} + 2 \times \overline{MB} \Leftrightarrow 8 = 2 + 2 \times \overline{MB} \Leftrightarrow 8 - 2 = 2 \times \overline{MB} \Leftrightarrow \frac{6}{2} = \overline{MB} \Leftrightarrow 3 = \overline{MB}$$

Como  $[CB]$  e  $[CT]$  são raios da circunferência, vem que

$$\overline{CB} = \overline{CT} = 9,2$$

Como o triângulo  $[BCA]$  é isósceles, e o ponto  $M$  é o ponto médio do lado menor  $[AB]$ , então  $[CM]$  é a altura relativamente ao lado  $[AB]$ , e por isso o lado  $[CM]$  é perpendicular ao lado  $[AB]$ , ou seja o triângulo  $[BCM]$  é retângulo em  $M$ .

Como, relativamente ao ângulo  $BCM$ , o lado  $[MB]$  é o cateto oposto e o lado  $[CB]$  é a hipotenusa, usando a definição de seno, temos:

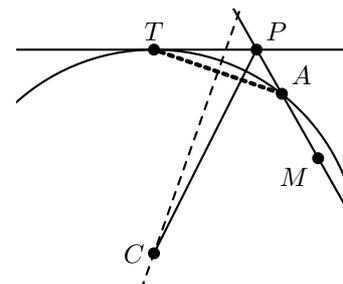
$$\text{sen}(\hat{BCM}) = \frac{\overline{MB}}{\overline{CB}} \Leftrightarrow \text{sen}(\hat{BCM}) = \frac{3}{9,2}$$

Como  $\frac{3}{9,2} \approx 0,326$ , procurando o valor mais próximo na coluna dos valores da tangente na tabela de valores das razões trigonométricas (ou recorrendo à calculadora), e arredondando a amplitude do ângulo  $BCM$  às unidades, temos que

$$\hat{BCM} = \text{sen}^{-1}\left(\frac{3}{9,2}\right) \approx 19^\circ$$

- 4.3. Como a mediatriz de qualquer corda de uma circunferência contém o centro da circunferência, podemos afirmar que o ponto que pertence à mediatriz do segmento de reta  $[AT]$  é o ponto  $C$

Resposta: **Opção C**



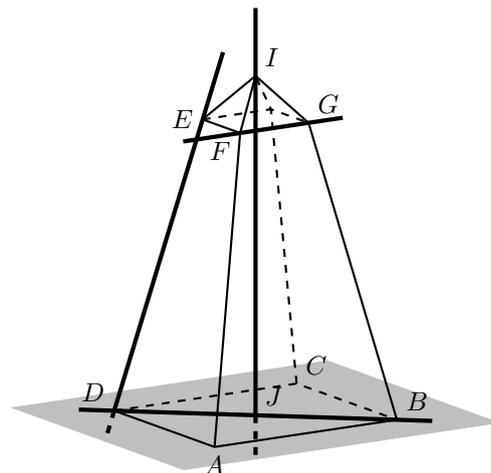
5.

5.1. Analisando as quatro retas indicadas podemos ver que

- a reta  $FG$  é paralela ao plano  $ABC$
- a reta  $ED$  é concorrente, mas não perpendicular ao plano  $ABC$
- a reta  $BD$  pertence ao plano  $ABC$

A reta  $IJ$  é perpendicular ao plano  $ABC$

Resposta: **Opção B**



5.2. Considerando a expressão para o volume,  $V$ , de um tronco de pirâmide quadrangular regular,  $V = \frac{h}{3}(L^2 + L \times l + l^2)$ , temos para o tronco de pirâmide  $[ABCDEFGH]$ , que

$$L = \overline{AB} = 8 \text{ cm e } l = \overline{FG} = 3 \text{ cm}$$

Para determinar a medida  $h$ , consideramos o ponto  $K$ , o centro do quadrado  $[EFGH]$ , e temos que  $\overline{IJ} = \overline{IK} + \overline{KJ}$ , pelo que

$$h = \overline{IJ} - \overline{IK}$$

Como  $\overline{IK}$  é a altura da pirâmide  $[EFGHI]$ , que tem volume  $6 \text{ cm}^3$ , podemos calcular  $\overline{IK}$  recorrendo à expressão do volume da pirâmide:

$$V_{[EFGHI]} = \frac{1}{3} \times A_b \times a = \frac{1}{3} \times \overline{FG}^2 \times \overline{IK}$$

Substituindo os valores conhecidos, vem

$$6 = \frac{1}{3} \times 3^2 \times \overline{IK} \Leftrightarrow 6 = \frac{9}{3} \times \overline{IK} \Leftrightarrow 6 = 3 \times \overline{IK} \Leftrightarrow \frac{6}{3} = \overline{IK} \Leftrightarrow 2 = \overline{IK}$$

Logo, vem que  $h = \overline{IJ} - \overline{IK} = 15 - 2 = 13$

E assim, recorrendo à expressão do volume do tronco de pirâmide quadrangular para calcular o volume em  $\text{cm}^3$ , do tronco de pirâmide  $[ABCDEFGH]$ , e arredondando o resultado às unidades, temos:

$$V_{[ABCDEFGH]} = \frac{13}{3}(64 + 24 + 9) = \frac{13}{3} \times 97 = \frac{1261}{3} \approx 420 \text{ cm}^3$$



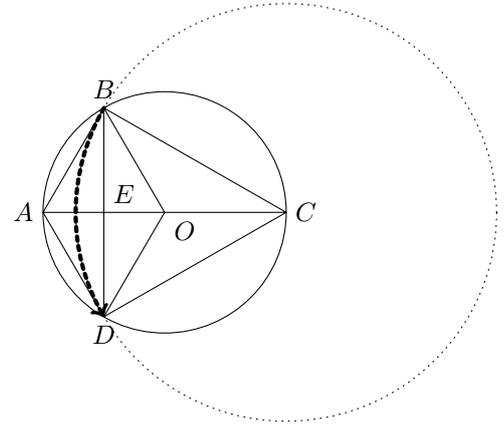
6.

- 6.1. Como  $B\hat{A}D = E\hat{A}B + E\hat{A}D = 60 + 60 = 120^\circ$  (porque os triângulos  $OAB$  e  $OAD$  são equiláteros), a rotação de centro  $A$ , que transforma o ponto  $B$  no ponto  $D$  tem amplitude  $120^\circ$  (no sentido negativo).

Relativamente à rotação de centro no ponto  $O$ , pela mesma razão a amplitude da rotação também tem amplitude de  $120^\circ$

Como o ponto  $E$  é o ponto médio do segmento de reta  $[AD]$  a rotação de centro  $E$ , que transforma o ponto  $B$  no ponto  $D$  tem amplitude  $180^\circ$

Como o triângulo  $[CBD]$  também é equilátero, a rotação de centro  $C$ , que transforma o ponto  $B$  no ponto  $D$  tem amplitude  $60^\circ$



Resposta: **Opção C**

- 6.2. Como  $E$  é o ponto médio do segmento de reta  $[AO]$ , temos que  $\overline{AE} = \overline{EO}$ , e assim, vem que

$$\overline{AO} = \overline{AE} + \overline{EO} = \overline{AE} + \overline{AE} = 1 + 1 = 2$$

Como os triângulos  $OAB$  e  $OAD$  são equiláteros,  $\overline{AO} = \overline{AB} = \overline{BO} = \overline{AD} = \overline{DO}$ , pelo que o perímetro do quadrilátero  $[ABOD]$  é

$$P_{[ABOD]} = \overline{AB} + \overline{BO} + \overline{AD} + \overline{DO} = 4 \times \overline{AO} = 4 \times 2 = 8$$

- 6.3. Temos que a área do triângulo  $[BAE]$ , considerando o lado  $[AE]$  como a base e o lado  $[EB]$  como a altura, temos

$$A_{[BAE]} = \frac{\overline{AE} \times \overline{EB}}{2} = \frac{1 \times \overline{EB}}{2} = \frac{\overline{EB}}{2}$$

Relativamente a área do triângulo  $[BOC]$ , considerando o lado  $[OC]$  como a base, a altura é o segmento  $[EB]$ , pelo que

$$A_{[BOC]} = \frac{\overline{OC} \times \overline{EB}}{2} = \frac{2 \times \overline{EB}}{2} = \overline{EB}$$

Assim, temos que

$$\frac{\text{área do triângulo } [BOC]}{\text{área do triângulo } [BAE]} = \frac{\overline{EB}}{\frac{\overline{EB}}{2}} = \frac{\overline{EB}}{\frac{1}{2} \overline{EB}} = \frac{2 \times \overline{EB}}{\overline{EB}} = 2$$



7. Como  $x$  é o número de canetas de feltro compradas e  $y$  é o número de lápis de cor comprados, a afirmação *O número de canetas de feltro compradas foi o dobro do número de lápis de cor comprados* pode ser traduzida por  $x = 2y$

Como cada caneta de feltro custou 0,25 euros,  $x$  canetas de feltro custaram  $0,25x$  euros; e como cada lápis de cor custou 0,20 euros,  $y$  lápis de cor custaram  $0,20y$  euros.

Como a escola gastou 63 euros na compra de  $x$  canetas de feltro e  $y$  lápis de cor, temos que  $0,25x + 0,20y = 63$

Assim, um sistema de equações que permite determinar o número de narizes vermelhos vendidos e o número de ímanes vendidos, pode ser

$$\begin{cases} x = 2y \\ 0,25x + 0,20y = 63 \end{cases}$$

8. Escrevendo a equação na fórmula canónica, usando a fórmula resolvente e apresentando as soluções na forma de fração irredutível, vem:

$$x(6x - 1) = 1 \Leftrightarrow 6x^2 - x = 1 \Leftrightarrow 6x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(a = 6, b = -1 \text{ e } c = -1)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(6)(-1)}}{2(6)} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{12} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 + 5}{12} \vee x = \frac{1 - 5}{12} \Leftrightarrow x = \frac{6}{12} \vee x = \frac{-4}{12} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = -\frac{1}{3}$$

$$\text{C.S.} = \left\{ -\frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right\}$$

9. Fazendo o desenvolvimento do caso notável, e simplificando, vem

$$(x - 2)^2 - x^2 = x^2 - 2 \times 2 \times x + 2^2 - x^2 = x^2 - 4x + 4 - x^2 = -4 + 4x$$

Resposta: **Opção A**

10. Como o gráfico é parte de uma reta que passa na origem, é o gráfico de uma função de proporcionalidade direta, pelo que a distância, percorrida pelo Martim, é diretamente proporcional ao tempo decorrido desde o instante em que saiu de casa até ao momento em que chegou à casa da sua avó.

Assim, como pela observação do gráfico podemos verificar que em 8 minutos o Martim percorreu 400 metros, então podemos determinar a distância,  $x$ , em metros, percorrida em 10 minutos, ou seja, a distância, percorrida pelo Martim, desde que saiu de casa até chegar à casa da sua avó

$$\frac{x}{10} = \frac{400}{8} \Leftrightarrow x = \frac{400 \times 10}{8} \Leftrightarrow x = \frac{4000}{8} \Leftrightarrow x = 500 \text{ metros}$$

Como o Martim regressou a casa pelo mesmo caminho, temos que a distância, em metros, percorrida pelo Martim no trajeto de ida e volta é

$$2x = 2 \times 500 = 1000 \text{ metros}$$



11. Como todos os números estão escritos em notação científica, a magnitude do número é maior se o expoente da potência de base 10 for maior.

Quando os expoentes das potências de base 10 são iguais, o maior número é o que tiver o maior valor multiplicado pela potência de base 10

Assim, ordenado os valores por ordem crescente, temos:

$$\begin{array}{ccccccc} 1,5 \times 10^{22} & < & 1,9 \times 10^{22} & < & 1,1 \times 10^{23} & < & 1,3 \times 10^{23} \\ b & < & d & < & c & < & a \end{array}$$

Resposta: **Opção A**

12. Aplicando as regras operatórias de potências temos que como  $x^4 = 3$ , então

$$x^8 = x^{4 \times 2} = (x^4)^2 = (3)^2 = 9 \quad \text{e} \quad x^{-4} = \frac{1}{x^4} = \frac{1}{3}$$

Pelo que, fazendo a substituição na expressão e somando as frações, temos

$$\frac{x^8}{2} - x^{-4} = \frac{9}{2(3)} - \frac{1}{3(2)} = \frac{27}{6} - \frac{2}{6} = \frac{25}{6}$$

13. O termo de ordem  $n$  desta sequência tem  $n$  bolas pretas e um total de  $n^2$  bolas, pelo que o número de bolas brancas, do termo de ordem  $n$  é

$$n^2 - n$$

Assim, o décimo termo da sequência, tem

$$10^2 - 10 = 100 - 10 = 90 \text{ bolas brancas}$$

14. Podemos calcular a ordenada do ponto de interseção dos dois gráficos, recorrendo à expressão algébrica da função  $f$ :

$$f(2) = 2^2 = 4$$

Como a função  $g$  é uma função de proporcionalidade inversa, a sua expressão algébrica é da forma

$$g(x) = \frac{k}{x}, \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Assim, substituindo as coordenadas do ponto de interseção dos gráficos (que pertence ao gráfico da função  $g$ ), podemos calcular o valor de  $k$ :

$$4 = \frac{k}{2} \Leftrightarrow 4 \times 2 = k \Leftrightarrow 8 = k$$

Ou seja,  $g(x) = \frac{8}{x}$

Resposta: **Opção C**



15. Resolvendo a inequação, temos

$$\frac{2}{1(6)} - \frac{x}{1(6)} > \frac{x}{3(2)} - \frac{1}{2(3)} \Leftrightarrow \frac{12}{6} - \frac{6x}{6} > \frac{2x}{6} - \frac{3}{6} \Leftrightarrow 12 - 6x > 2x - 3 \Leftrightarrow -6x - 2x > -3 - 12 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -8x > -15 \Leftrightarrow 8x < 15 \Leftrightarrow x < \frac{15}{8}$$

$$\text{C.S.} = \left] -\infty, \frac{15}{8} \right[$$

16. Como, de acordo com o gráfico, em 50% dos jogos, ou seja em metade dos jogos, a equipa conseguiu 3 pontos, e na outra metade dos jogos não conseguiram os 3 pontos, logo o número total de jogos no campeonato é par, pelo que a mediana a média dos dois valores centrais, da lista ordenada das pontuações. Como 50% das pontuações obtidas pela equipa nos jogos desse campeonato foram 3 pontos, e os restantes 0 e 1 pontos, os valores centrais, na lista ordenada das pontuações são 1 e 3.

$$\underbrace{0 \dots 0 \ 1 \ 1 \dots 1}_{50\%} \quad \underbrace{3 \ 3 \dots 3 \ 3 \ 3}_{50\%}$$

Logo a mediana,  $\tilde{x}$ , das pontuações obtidas pela equipa nos jogos desse campeonato, é

$$\tilde{x} = \frac{1 + 3}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ pontos}$$

