

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA B DO ENSINO SECUNDÁRIO

(CÓDIGO DA PROVA 735) – 1ª FASE – 23 DE JUNHO 2016

Grupo I

1. A função objetivo é o lucro obtido com a venda de x pares de calçado do modelo X e y pares de calçado do modelo Y: $L(x,y) = 100x + 150y$

Restrições do problema:

$$x \geq 0$$

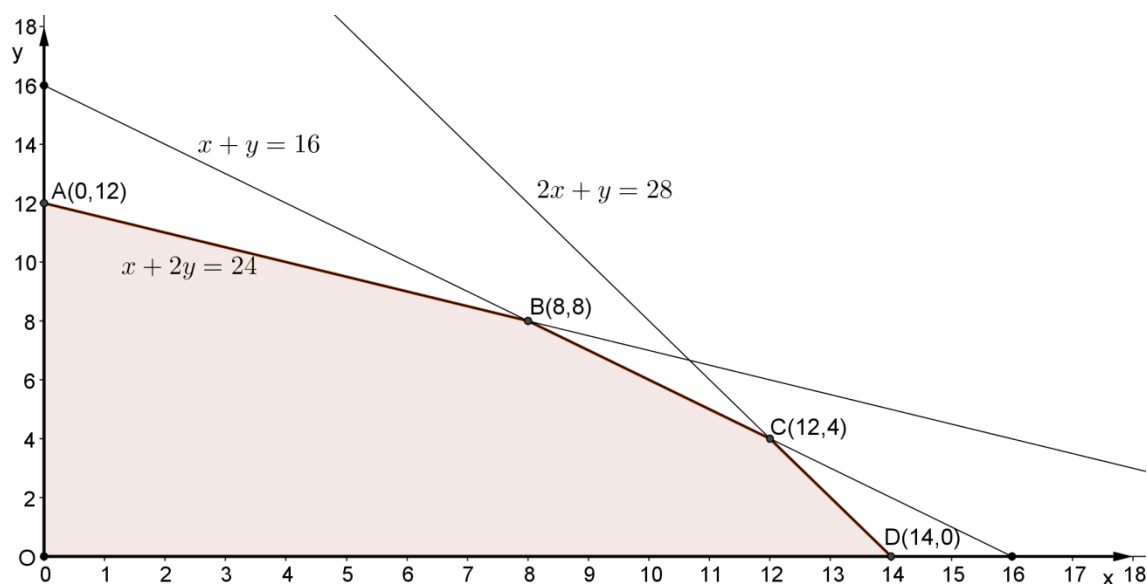
$$y \geq 0$$

$$20x + 40y \leq 8 \times 60 \Leftrightarrow x + 2y \leq 24 \text{ (dividindo os termos da desigualdade por 20)}$$

$$30x + 30y \leq 8 \times 60 \Leftrightarrow x + y \leq 16 \text{ (dividindo os termos da desigualdade por 30)}$$

$$40x + 20y \leq 9 \times 60 + 20 \Leftrightarrow 2x + y \leq 28 \text{ (dividindo os termos da desigualdade por 20)}$$

Representação gráfica da região admissível



Vértice	x	y	$L(x,y) = 100x + 150y$
A	0	12	1800
B	8	8	2000
C	12	4	1800
D	14	0	1400

Solução do problema: $x = y = 8$

O lucro máximo obtém-se com a produção diária de 8 pares de calçado de cada um dos modelos X e Y.

2.

2.1. Se a soma do número de operários que trabalham no departamento de corte e do número de operários que trabalham no departamento de acabamento é 23, em vez de 20, então há 3 operários que trabalham nos dois departamentos ($10 + 13 - 3$).

A probabilidade de o operário escolhido trabalhar nos dois departamentos é $\frac{3}{20}$ ou 0,15

Resposta: 15%

2.2. $P(\text{o operário ter faltado no máximo 2 dias no último mês}) = 0,95 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 0,6 + a + 0,15 = 0,95 \Leftrightarrow a = 0,2$$

Como a soma das probabilidades $P(Z = z_i)$ é 1, então $b = 1 - 0,95 = 0,05$

Valor médio da variável aleatória Z:

$$\mu = 0 \times 0,6 + 1 \times 0,2 + 2 \times 0,15 + 3 \times 0,05 = 0,65$$

Grupo II

1.

Tempo	$0 \times 20 \text{ min}$	$1 \times 20 \text{ min}$	$2 \times 20 \text{ min}$...
n.º bactérias	2	4	8	...

Como esquematizado na tabela, a sucessão do número de bactérias ao fim de $n \times 20 \text{ min}$ é uma progressão geométrica de razão 2 e primeiro termo 4.

Como 5 horas = $5 \times 3 \times 20 \text{ min} = 15 \times 20 \text{ min}$, o que procuramos é o termo de ordem 15

$$g_{15} = 4 \times 2^{14} = 65\,536$$

O número de bactérias ao fim de 5 horas é de 65 536, logo superior a 65 000.

2.

Geração n	1	2	3	...
n.º bactérias b_n	1000	2000	4000	...

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\times 2}$ $\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\times 2}$

Como em cada geração cada bactéria se divide em duas, o número de bactérias duplica a cada geração e, por isso, (b_n) é uma progressão geométrica de razão 2. Como o primeiro termo é 1000, a expressão do termo geral é:

$$b_n = 1000 \times 2^{n-1}$$

Grupo III

1. A figura 1 não pode representar o gráfico da função f porque, de acordo com o mesmo, foram atendidas mais de 180 pessoas até 19 de janeiro e após o dia 9 de fevereiro, o que contraria o facto de essa situação ter ocorrido em dias consecutivos.

A figura 2 não pode representar o gráfico da função f porque, de acordo com o mesmo, ao 40º dia foram atendidas zero pessoas ($f(40) = 0$), o que contraria o facto de terem sido atendidas pessoas todos os dias.

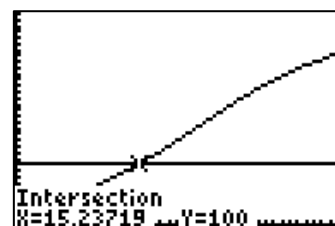
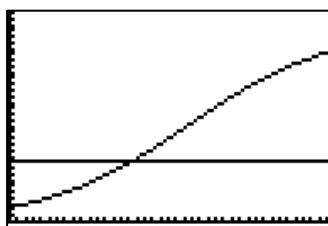
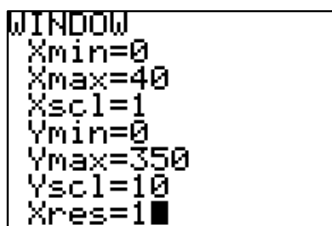
A figura 3 não pode representar o gráfico da função f porque, de acordo com o mesmo, o dia 30 de janeiro não corresponde a um dos extremantes da função uma vez que $f(20)$ não é nem um máximo nem um mínimo da função.

2.

2.1.1. Para responder, deve-se resolver a inequação

$$N_A(t) > 100 \Leftrightarrow \frac{325}{1 + 12 \times 3^{-0,1t}} > 100$$

Determinando graficamente a interseção do gráfico de $N_A(t)$ com a reta de equação $y = 100$, obtém-se $t \approx 15,2372$



Cálculo do número de horas: $0,2372 \times 24 = 5,6928$

Têm que decorrer 15 dias e 6 horas, aproximadamente, para que o número total de infetados no agrupamento A ultrapasse uma centena.

2.1.2. O número de infetados às oito horas do dia 20 de janeiro no agrupamento B é dado por $N_B(10)$.

Atendendo à relação entre N_A e N_B temos que:

$$k \times N_A(10) = N_B(10) \Leftrightarrow k = N_B(10) \times \frac{1}{N_A(10)}$$

$$\Leftrightarrow k = 39 \times \frac{1 + 12 \times 3^{-0,1 \times 10}}{325}$$

$$\Leftrightarrow k = 39 \times \frac{5}{325} \Leftrightarrow k = \frac{195}{325} \Leftrightarrow k = 0,6$$

2.2. Tendo em consideração o gráfico da função V , de onde se verifica que esta é uma função sempre positiva, podemos concluir que a função N_C é estritamente crescente (cresce sempre nos primeiros 40 dias).

Então N_C atinge o seu valor máximo quando $t = 40$.

Desde o dia 10 de janeiro até ao fim do mês (dia 31) temos 21 dias; para perfazer 40 dias há que juntar mais 19 dias do mês de fevereiro de 2016, pelo que a afirmação é verdadeira

Grupo IV

1. Atendendo a que $[ABC]$ é um triângulo equilátero, tem-se que

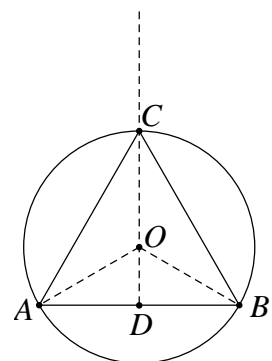
$$\widehat{AOB} = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$$

e como OC é um eixo de simetria da figura, sabemos que o ângulo

\widehat{ADO} é reto e que $\widehat{AOD} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$.

Então $\frac{\overline{AD}}{\overline{AO}} = \text{sen } 60^\circ$

$$\overline{AD} = \overline{AO} \times \text{sen } 60^\circ$$



$$\overline{AD} = \sqrt{27} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\overline{AD} = \frac{\sqrt{81}}{2} = \frac{9}{2} \quad \text{logo} \quad \overline{AB} = 9 \text{ cm}$$

2. Área da região sombreada = Área do círculo – Área do triângulo ABC

Área do círculo: $A_c = \pi r^2$

$$A_c = \pi \times \sqrt{27}^2 = 27\pi$$

Área do triângulo: $A_t = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$

altura do triângulo: $\frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} = \text{sen } 60^\circ$

$$\frac{\overline{CD}}{9} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \overline{CD} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

$$A_t = \frac{9 \times \frac{9\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{81\sqrt{3}}{4}$$

Então, a área da região sombreada é $A_s = 27\pi - \frac{81\sqrt{3}}{4} \approx 49,75$

aproximadamente 50 cm^2 .

3. Da figura ao lado, simétrica relativamente ao eixo RO , sabemos que os triângulos OPR e OQR são iguais e são triângulos retângulos porque a tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio no ponto de tangência.

Tem-se

$$\overline{OR} = \overline{OC} + \overline{CR} = \sqrt{27} + 12$$

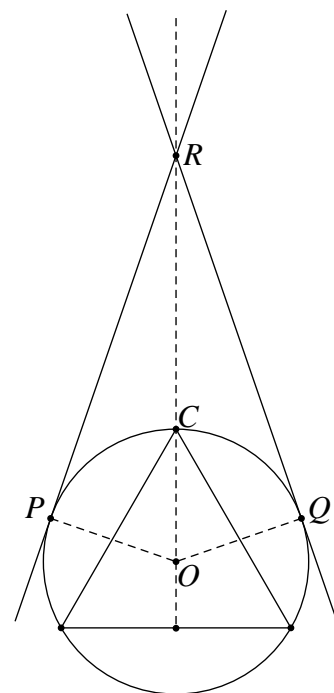
$$\overline{OQ} = \sqrt{27}$$

Então

$$\text{tg } \hat{ORQ} = \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{27} + 12}$$

$$\text{tg } \hat{ORQ} = 0,302\dots$$

$$\hat{ORQ} = 16,81\dots^\circ$$



Logo $\widehat{PRQ} = 2 \times 16,81\dots^\circ = 33,62\dots^\circ$

A amplitude do ângulo PRQ mede aproximadamente 34° .

4.

4.1. O transformado de A na rotação de centro O e amplitude -240° é o ponto B , como está esquematizado na figura.

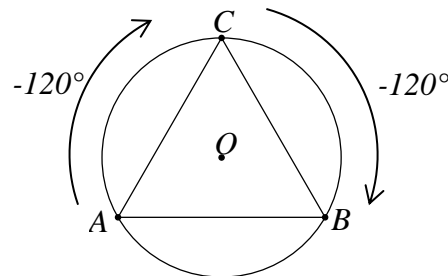
4.2. Se a razão entre as áreas dos círculos é 4, a razão entre comprimentos correspondentes é $\sqrt{4} = 2$.

Comprimento da circunferência circunscrita

$$C_c = 2 \times \pi \times \sqrt{27}$$

Então $C_i = \pi \times \sqrt{27} = 16,324\dots$

O comprimento da circunferência inscrita é aproximadamente 16,32 cm.



FIM