SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

Proposta de Resolução da Prova Final de Matemática A -12º ANO

Código 635 - 1ª Fase - 2016 - 23 de junho de 2016

Grupo I

	1	2	3	4	5	6	7	8
Versão 1	C	B	B	D	D	A	C	B
Versão 2	D	C	D	B	C	D	A	A

Grupo II

1.

$$\rho = \left|-1+\sqrt{3}i\right| = \sqrt{1+3} = 2 \quad tg\,\alpha = -\sqrt{3} \; e \; \alpha \in 2^{o}Q \; pelo \; que \; -1+\sqrt{3}i = 2cis\left(\frac{2}{3}\pi\right)$$

$$z_1 = \frac{8cis\,\theta}{2cis\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = 4cis\left(\theta - 2\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\overline{z_1} = 4cis\left(-\theta + 2\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\overline{z_1} \times z_2 = 4cis\left(-\theta + 2\frac{\pi}{3}\right) \times cis(2\theta) = 4cis\left(-\theta + 2\frac{\pi}{3} + 2\theta\right) = 4cis\left(\theta + 2\frac{\pi}{3}\right)$$

$$Para\; que\; \overline{z_1} \times z_2 \; seja\; um\; número\; real\; então\; \theta + 2\frac{\pi}{3} = k\pi, k \in Z \Leftrightarrow \theta = -\frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in Z$$

$$Se\; k = 1\; então\; \theta = \frac{\pi}{3}$$

2.1

$$x_i \in \{1,2,4,8\}$$

x_i	1	2	4	8
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{9}$

$$P(X=1)=\frac{{}^{4}C_{2}}{{}^{9}C_{2}}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$
$$P(X=2)=\frac{{}^{4}C_{1}\times{}^{4}C_{1}}{{}^{9}C_{2}}=\frac{16}{36}=\frac{4}{9}$$
$$P(X=4)=\frac{{}^{4}C_{2}+{}^{4}C_{1}\times{}^{1}C_{1}}{{}^{9}C_{2}}=\frac{6+4}{36}=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$$
$$P(X=8)=\frac{{}^{4}C_{1}\times{}^{1}C_{1}}{{}^{9}C_{2}}=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$$

2.2

$${}^{8}C_{3}\times{}^{5}C_{4}=56\times5=280$$

3.1

$$(x+1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$$

3.2

$$M_{[AC]}=(-2,2,1), \textit{ pelo que } V(-2,2,z)$$
$$\textit{Como } V \textit{ pertence ao plano } BCV,\ 3\times2+z-10=0 \Leftrightarrow z=4$$
$$V(-2,2,4)$$

Resposta: $V(-2,2,4)$

3.3

$$\overrightarrow{AC}=(-2,2,0) \textit{ vetor normal ao plano } \alpha$$
$$\textit{Plano } \alpha: \textit{Como passa em } P(1,-2,-1) \textit{ então } -2\times1+2\times(-2)+D=0 \Leftrightarrow -6+D=0 \Leftrightarrow D=6$$
$$-2x+2y+6=0 \Leftrightarrow x-y-3=0$$
$$\textit{Interseção dos dois planos}$$
$$\begin{cases} x-y-3=0 \\ 3y+z-10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y+3 \\ z=-3y+10 \end{cases}$$
$$\textit{Então}$$
$$(x,y,z)=(y+3,y,-3y+10)=(3,0,10)+y(1,1,-3), y\in\Re$$
$$\textit{uma equação vetorial da reta}: (x,y,z)=(3,0,10)+k(1,1,-3), k\in\Re$$

4.1

$$h'(t)=\frac{1}{2\pi}\left(-sen(2\pi t)\times 2\pi\right)+1sen(2\pi t)+t\cos(2\pi t)\times 2\pi$$
$$=-sen(2\pi t)+sen(2\pi t)+2\pi t\cos(2\pi t)$$
$$=2\pi t\cos(2\pi t)$$
$$h'(t)=0\Leftrightarrow 2\pi t\cos(2\pi t)=0\Leftrightarrow 2\pi t=0\vee\cos(2\pi t)=0$$
$$\Leftrightarrow t=0\vee 2\pi t=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z$$
$$\Leftrightarrow t=0\vee t=\frac{1}{4}+\frac{k}{2},k\in Z$$

Para

$$k=0,t=0\vee t=\frac{1}{4}$$
$$k=1,t=0\vee t=\frac{3}{4}$$

	0		$\frac{1}{4}$		$\frac{3}{4}$		**1**
$2\pi t$	**0**	**+**	**0**	**+**	**0**	**+**	2π
$\cos(2\pi t)$	**1**	**+**	**0**	**-**	**0**	**+**	**1**
Sinal de h´(t)	**0**	**+**	**0**	**-**	**0**	**+**	2π
Monotonia de h	$20+\frac{1}{2\pi}$ **mín**	$\nearrow$	$20+\frac{1}{4}$ **Máx**	$\searrow$	$20-\frac{3}{4}$ **mín**	$\nearrow$	$20+\frac{1}{2\pi}$ **Máx**

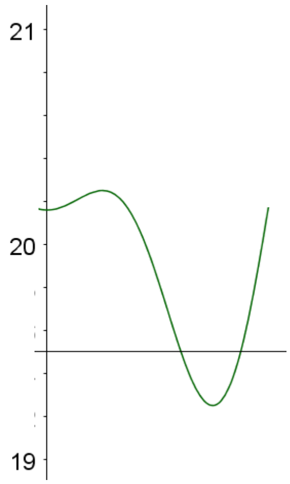
$$h(0)=20+\frac{1}{4};\quad h\left(\frac{1}{4}\right)=20+\frac{1}{2\pi}\times 0+\frac{1}{4}=20+\frac{1}{4}\ ;\quad h\left(\frac{3}{4}\right)=20+0-\frac{3}{4}\times 1=20-\frac{3}{4}$$
$$h(1)=20+\frac{1}{2\pi}$$

logo

$M=20+\frac{1}{4}$ **e** $m=20-\frac{3}{4}$

$$A=20+\frac{1}{4}-20+\frac{3}{4}=1$$

4.2.



- $a \approx 0{,}606$ e $b \approx 0{,}877$
- $b - a \approx 0{,}27$
- No contexto do problema

Durante 0,27 minutos a distância do ponto P do tabuleiro a um ponto fixo do vale foi inferior a 19,5 metros.

5.1.

$$\lim_{x\to -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = f'(-1) = e^{-1}\left((-1)^2 - 1 + 1\right) = \frac{1}{e} = p$$

$$q = -\frac{1}{p} = -e$$

O valor de q corresponde ao declive da reta perpendicular à reta tangente ao gráfico de f em $x = -1$.

5.2.

$$f''(x) = \left(e^x(x^2+x+1)\right)' = e^x.(x^2+x+1) + e^x.(2x+1) = e^x.(x^2+3x+2)$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 0 \vee x^2+3x+2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = -1$$

x	-∞	-2		-1	+∞
$f''(x)$	+	0	-	0	+
Gráfico de f	∪	PI	∩	PI	∪

A concavidade do gráfico está voltada para cima nos intervalos $]-\infty,-2[$ e em $]-1,+\infty[$

A concavidade do gráfico está voltada para baixo em $]-2,-1[$

As abcissas dos pontos de inflexão são, respetivamente $x = -2$ e $x = -1$

6.1.

Atendendo a que a função é contínua no domínio, então só poderá existir assíntota vertical em $x = -1$ ou $x = 1$.

$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = ln\frac{-2}{0^-} = +\infty$ logo $x = -1$ é assíntota vertical

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = ln\frac{0^+}{2} = -\infty$ logo $x = 1$ é assíntota vertical

6.2.

Esta questão pode ser resolvida por vários processos, sendo um deles o seguinte:

A função f é ímpar pois se $x \in D_f \; então - x \in D_f$ e

$$f(-x) = ln\left(\frac{-x-1}{-x+1}\right) = ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{-1} = -ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -f(x)$$

A reta secante passa nos pontos de coordenadas $(a, f(a))$ e $(-a, f(-a))$ mas $f(-a) = -f(a)$ logo passa em $(a, f(a))$ e $(-a, -f(a))$ pelo que o declive é igual a $\frac{-2f(a)}{-2a} = \frac{f(a)}{a}$

Então a reta tangente terá por equação $y - f(a) = \frac{f(a)}{a}(x - a) \Leftrightarrow y = \frac{f(a)}{a}x$ e o ponto $(x, y) = (0,0)$ verifica esta equação.