Exame Nacional de Matemática A

2018 – 1.ª Fase

Proposta de Resolução

Site: http://recursos-para-matematica.webnode.pt/

Facebook: https://www.facebook.com/recursos.para.matematica

Exame Nacional de Matemática A

1.ª Fase | 2018

Proposta de Resolução

CADERNO 1

1.

1.1. Seja X a variável aleatória:

X: «número de vezes que a face com o número 3 fica voltada para baixo em dez lançamentos do dado»

Assim, X é uma variável aleatória com distribuição binomial de parâmetros $n=10$ (dez provas repetidas) e $p=\frac{1}{4}$ (probabilidade de ocorrer sucesso: no lançamento deste dado, a probabilidade da face com o número 3 ficar voltada para baixo é $\frac{1}{4}$), ou seja, $X \sim \text{Bin}\left(10, \frac{1}{4}\right)$.

Pretende-se determinar o valor de $P(X=6)$. Assim:

$$P(X=6) = {}^{10}C_6 \times \left(\frac{1}{4}\right)^6 \times \left(1-\frac{1}{4}\right)^4 = {}^{10}C_6 \times \left(\frac{1}{4}\right)^6 \times \left(\frac{3}{4}\right)^4 \approx 0{,}016$$

Resposta: B

1.2. Como f é diferenciável em $[0,2]$, vem que f é contínua em $[0,2]$ e diferenciável em $]0,2[$. Assim, pelo teorema de Lagrange, tem-se que:

$$\exists c \in]0,2[: f'(c) = \frac{f(2)-f(0)}{2-0} \Leftrightarrow \exists c \in]0,2[: f'(c) = \frac{f(2)-1}{2}$$

Como para todo o $x \in [0,2]$ se tem $0 < f'(x) < 9$, em particular, vem que $0 < f'(c) < 9$ e pelo que:

$$0 < f'(c) < 9 \Leftrightarrow 0 < \frac{f(2)-1}{2} < 9 \underset{\times 2}{\Leftrightarrow} 0 < f(2)-1 < 18 \Leftrightarrow 1 < f(2) < 19$$

Resposta: B

2.

2.1. As bases do prisma são hexágonos regulares, pelo que a amplitude dos seus ângulos internos é $120°$. Assim, como $\overline{PQ}=4$, vem que $\overline{QR}=4$ e portanto:

$$\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QR} = \left\|\overrightarrow{QP}\right\| \times \left\|\overrightarrow{QR}\right\| \times \cos\left(P\hat{Q}R\right) = \overline{PQ} \times \overline{QR} \times \cos(120°) = 4 \times 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{16}{2} = -8$$

2.2. Tem-se que:

▪ as faces laterais do prisma são rectângulos, pelo que a sua área lateral é dada por:

$$6\times\overline{PQ}\times\overline{PS}=6\times4\times\overline{PS}=24\overline{PS}$$

▪ um vector normal ao plano $PQR: 2x+3y-z-15=0$, é $\vec{n}(2,3,-1)$ pelo que, como a recta PS é perpendicular ao plano PQR, um vector director da recta PS é $\vec{n}(2,3,-1)$ e portanto:

$$PS:(x,y,z)=(14,5,0)+k(2,3,-1)\Leftrightarrow\begin{cases}x=14+2k\\ y=5+3k\\ z=-k\end{cases},\ k\in\mathbb{R}$$

▪ o ponto P pertence à recta PS, pelo que as suas coordenadas são da forma $(14+2k,5+3k,-k)$, $k\in\mathbb{R}$. Assim, como P também pertence ao plano PQS, substituindo as suas coordenadas na equação de PQS, vem:

$$2(14+2k)+3(5+3k)-(-k)-15=0\Leftrightarrow28+4k+\cancel{15}+9k+k-\cancel{15}=0\Leftrightarrow14k=-28\Leftrightarrow k=-2$$

Logo, as coordenadas de P são $(14+2\times(-2),5+3\times(-2),-(-2))=(10,-1,2)$ e portanto:

$$\overline{PS}=\sqrt{(10-14)^2+(-1-5)^2+(2-0)^2}=\sqrt{16+36+4}=\sqrt{56}$$

$\therefore$ a medida da área lateral do prisma é $24\overline{PS}=24\times\sqrt{56}\approx179,6$.

2.3. O número de casos possíveis é ${}^6C_2\times{}^6C_2$. Escolhem-se dois vértices de uma das bases do prisma. O número de maneiras de o fazer é ${}^6C_2$. Para cada uma destas maneiras, existem ${}^6C_2$ maneiras distintas de escolher dois vértices da outra base do prisma.

O número de casos favoráveis é 6. Cada uma das seis faces do prisma tem exactamente quatro vértices, sendo que exactamente dois pertencem a uma das bases e os outros dois pertencem à outra base.

Assim, pela Lei de Laplace, a probabilidade pedida é $\dfrac{6}{{}^6C_2\times{}^6C_2}=\dfrac{2}{75}\approx0,03$.

3.

3.1. Agrupando num bloco os quatro alunos de Espanhol e noutro bloco os oito alunos de Inglês, estes dois blocos permutam entre si de $2!$ maneiras distintas. Para cada uma destas maneiras, os quatro alunos do bloco de Espanhol permutam entre si de $4!$ maneiras distintas e os oito alunos do bloco de Inglês permutam entre si de $8!$ maneiras distintas.

Logo, o número de maneiras de dispor os doze alunos nas condições do enunciado é $2!\times 4!\times 8! = 1935360$.

Resposta: D

3.2. Sejam E e I os acontecimentos:

E: «o aluno escolhido estuda Espanhol» e I: «o aluno escolhido estuda Inglês»

Assim, pelo enunciado tem-se que:

- $P(E) = P(I)$
- $P(E \cup I) = 4P(E \cap I)$

Pretende-se $P(I|E) = \dfrac{P(I \cap E)}{P(E)}$.

Assim, como $P(E \cup I) = 4P(E \cap I)$ e $P(E) = P(I)$, vem que:

$$P(E \cup I) = 4P(E \cap I) \Leftrightarrow P(E) + \underbrace{P(I)}_{=P(E)} - P(E \cap I) = 4P(E \cap I) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2P(E) = 5P(E \cap I) \Leftrightarrow P(E \cap I) = \frac{2}{5}P(E)$$

Logo, $P(I|E) = \dfrac{P(I \cap E)}{P(E)} = \dfrac{\frac{2}{5}\cancel{P(E)}}{\cancel{P(E)}} = \dfrac{2}{5} = 0,4 = 40\%$

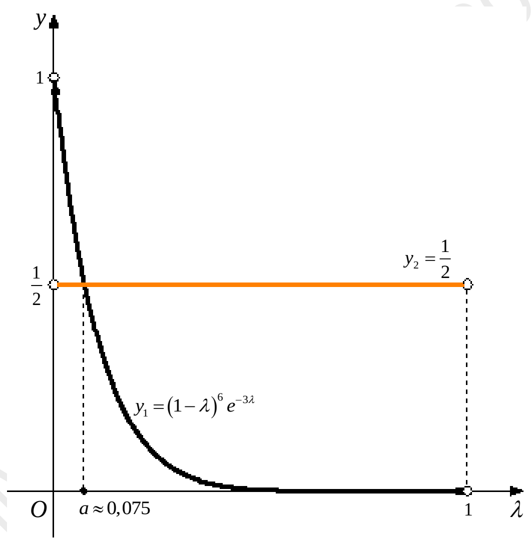
4. Tem-se que:

- $R = \lambda$
- $L = \frac{I}{2}$

Assim, como $L = I(1-R)^6 e^{-3\lambda}$, fazendo as devidas substituições, vem que:

$$L = I(1-R)^6 e^{-3\lambda} \underset{\substack{R=\lambda \\ L=\frac{I}{2}}}{\Leftrightarrow} \frac{\cancel{I}}{2} = \cancel{I}(1-\lambda)^6 e^{-3\lambda} \Leftrightarrow (1-\lambda)^6 e^{-3\lambda} = \frac{1}{2}$$

Recorrendo ao editor de funções da calculadora, define-se $y_1 = (1-\lambda)^6 e^{-3\lambda}$ e $y_2 = \frac{1}{2}$ na janela $[0,1]\times[0,1]$:



Assim, $(1-\lambda)^6 e^{-3\lambda} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \lambda = a$, com $a \approx 0{,}075$.

5. Tem-se que $z=\underbrace{(\cos x+i\operatorname{sen} x)}_{=e^{ix}}^{10}\Leftrightarrow\left(e^{ix}\right)^{10}=e^{i(10x)}=\cos(10x)+i\operatorname{sen}(10x)$.

Como $\operatorname{Im}(z)=\frac{1}{3}\operatorname{Re}(z)$, vem que $\operatorname{sen}(10x)=\frac{1}{3}\cos(10x)$.

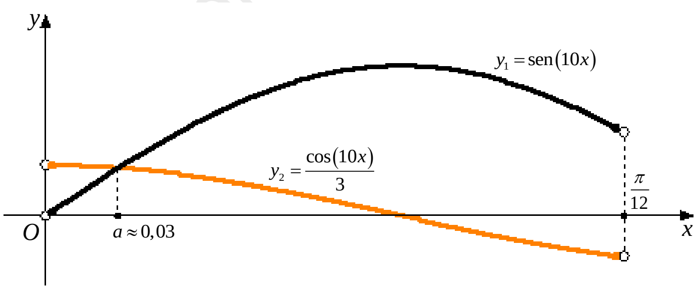
Assim, para $\cos(10x)\neq 0$ e $0<x<\frac{\pi}{12}$, tem-se:

$$\operatorname{sen}(10x)=\frac{1}{3}\cos(10x)\Leftrightarrow\frac{\operatorname{sen}(10x)}{\cos(10x)}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\operatorname{tg}(10x)=\frac{1}{3}\Leftrightarrow 10x=\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right)\Leftrightarrow x=\frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right)}{10}\approx 0{,}03$$

Nota: se $x=\frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right)}{10}$, então $\cos(10x)\approx 0{,}9995\neq 0$

Outra resolução: Tem-se que $\operatorname{Im}(z)=\frac{1}{3}\operatorname{Re}(z)\Leftrightarrow\operatorname{sen}(10x)=\frac{1}{3}\cos(10x)$

Recorrendo ao editor de funções da calculadora, define-se $y_1=\operatorname{sen}(10x)$ e $y_2=\frac{\cos(10x)}{3}$ na janela $\left[0,\frac{\pi}{12}\right]\times[-1,1]$:



Assim, $\operatorname{sen}(10x)=\frac{1}{3}\cos(10x)\Leftrightarrow x=a$, com $a\approx 0{,}03$.

Resposta B

6. Seja (u_n) a progressão geométrica onde três dos seus termos consecutivos são a, $a+6$ e $a+18$, com $a \in \mathbb{R}$.

Assim tem-se que $\frac{a+18}{a+6} = \frac{a+6}{a}$, com $a \neq 0$, $a \neq -6$ e $a \neq -18$, pelo que, para $a \in \mathbb{R} \setminus \{-18, -6, 0\}$, vem:

$$\frac{a+18}{a+6} = \frac{a+6}{a} \Leftrightarrow a(a+18) = (a+6)^6 \Leftrightarrow \cancel{a^2} + 18a = \cancel{a^2} + 12a + 36 \Leftrightarrow 6a = 36 \Leftrightarrow a = 6$$

Sendo r a razão da progressão geométrica (u_n), tem-se $r = \frac{a+6}{a} \underset{a=2}{=} \frac{6+6}{6} = 12$.

Portanto, como a soma dos sete primeiros termos desta progressão geométrica é 381, vem que:

$$S_7 = 381 \Leftrightarrow u_1 \times \frac{1-2^7}{1-2} = 381 \Leftrightarrow u_1 \times \frac{1-128}{-1} = 381 \Leftrightarrow 127u_1 = 381 \Leftrightarrow u_1 = \frac{381}{127} \Leftrightarrow u_1 = 3$$

$\therefore\ u_1 = 3$

CADERNO 2

9. Tem-se que:

$$w = 1 + \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{3}\,i^5}{1+2i} \underset{i^5 = i}{=} 1 + \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{3}\,i}{1+2i} \times \frac{1-2i}{1-2i} = 1 + \frac{2\sqrt{3} - 4\sqrt{3}\,i - \sqrt{3}\,i + 2\sqrt{3}\,i^2}{1^2 - (2i)^2} =$$

$$= 1 + \frac{\cancel{2\sqrt{3}} - 5\sqrt{3}\,i - \cancel{2\sqrt{3}}}{1 - 4i^2} = 1 - \frac{\cancel{5}\sqrt{3}\,i}{\cancel{5}} = 1 - \sqrt{3}\,i$$

Escrevendo então w na forma trigonométrica vem:

- $|w| = \left|1 - \sqrt{3}i\right| = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

- sendo θ um argumento de w, tem-se $\operatorname{tg}\theta = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$, com $\theta \in 4.^{\text{o}}\,Q$, pelo que $\theta = -\frac{\pi}{3}$.

Logo, $w = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$.

Como w é uma raiz quarta de z, as restantes raízes quartas de z são:

$$2e^{i\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{4}\right)}=2e^{i\frac{\pi}{6}}\text{ , }2e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{4}\right)}=2e^{i\frac{2\pi}{3}}\text{ e }2e^{i\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{2\pi}{4}\right)}=2e^{i\frac{7\pi}{6}}$$

Como se pretende a raiz quarta de z cujo afixo pertence ao primeiro quadrante, o número complexo pedido é $2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

10.

10.1. Recorrendo a uma tabela de dupla entrada tem-se:

$\times$	**0**	**1**	**2**	**3**
0		0	0	0
1	0		2	3
2	0	2		6
3	0	3	6	

Assim, tem-se que $X=\{0,2,3,6\}$ e $P(X=0)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$, $P(X=2)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$, $P(X=3)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$ e $P(X=6)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$, pelo que $k=0$.

Resposta: D

10.2. Tem-se que $\lim(u_n)=\lim\left(\frac{n+k}{n}\right)^n=\lim\left(\frac{n}{n}+\frac{k}{n}\right)^n=\lim\left(1+\frac{k}{n}\right)^n=e^k$.

Como o limite da sucessão (u_n) é solução da equação $\ln\left(\frac{x}{e}\right)=3$, vem que:

$$\ln\left(\frac{e^k}{e}\right)=3 \Leftrightarrow \ln\left(e^{k-1}\right)=3 \Leftrightarrow k-1=3 \Leftrightarrow k=4$$

Resposta: D

11. Tem-se que $\ln b = 4\ln a \Leftrightarrow \ln b = \ln\left(a^4\right) \Leftrightarrow b = a^4$, pelo que:

$$a^x \geq b^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow a^x \geq \left(a^4\right)^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow a^x \geq a^{\frac{4}{x}} \underset{a>1}{\Leftrightarrow} x \geq \frac{4}{x} \Leftrightarrow x - \frac{4}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-4}{x} \geq 0$$

Cálculo auxiliar:

$$\frac{x^2-4}{x}=0 \Leftrightarrow x^2-4=0 \;\wedge\; x \neq 0 \Leftrightarrow x^2=4 \;\wedge\; x\neq 0 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{4} \;\wedge\; x\neq 0 \Leftrightarrow \left(x=-2 \;\vee\; x=2\right) \;\wedge\; x\neq 0$$

Recorrendo a uma tabela:

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
x^2-4	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{x^2-4}{x}$	$-$	0	$+$	n.d.	$-$	0	$+$

Logo, o conjunto solução da equação dada é $\left[-2,0\right[\cup \left[2,+\infty\right[$.