Prova Final de Matemática | 3.º Ciclo do Ensino Básico

2018 – 2.ª Fase | Proposta de Resolução

Site: http://recursos-para-matematica.webnode.pt/

Facebook: https://www.facebook.com/recursos.para.matematica

Prova Final de Matemática

3.º Ciclo do Ensino Básico

2.ª Fase | 2018

Proposta de Resolução

CADERNO 1

1. Ordenando os dados, tem-se:

421	435	468	540	553	604	634
	Q_1		$\tilde{x}$		Q_3	

O número de dados é ímpar, neste caso $n=7$, pelo que a mediana, $\tilde{x}$, é igual a 540, o primeiro quartil, Q_1, é 435 e o terceiro quartil, Q_3, é 604.

Logo, a amplitude interquartis, em metros é dado por $Q_3 - Q_1 = 604 - 435 = 169$ metros.

Resposta: A

2. Como $\sqrt{10} \approx 3{,}16$ e $\pi \approx 3{,}14$, vem que $\sqrt{10} > \pi$. Consideremos a seguinte figura (figura não à escala):

Logo, $A \cap B = \left]-\infty, \sqrt{10}\right[\cap [\pi, 5] = \left[\pi, \sqrt{10}\right[$.

3. Tem-se que:

▪ no primeiro arranha-céus foram gastos $10{,}5$ mil toneladas de aço.

Mas como $10{,}5$ mil $= 10{,}5 \times 10^3 = 1{,}05 \times 10 \times 10^3 = 1{,}05 \times 10^4$, no primeiro arranha-céus foram gastos $1{,}05 \times 10^4$ toneladas de aço.

▪ no segundo arranha-céus foram gastos $2 \times 10{,}5 = 21$ mil toneladas de aço.

Mas como 21 mil $= 21 \times 10^3 = 2{,}1 \times 10 \times 10^3 = 2{,}1 \times 10^4$, no segundo arranha-céus foram gastos $2{,}1 \times 10^4$ toneladas de aço.

Logo, como $1{,}05 \times 10^4 + 2{,}1 \times 10^4 = (1{,}05 + 2{,}1) \times 10^4 = 3{,}15 \times 10^4$, nos dois arranha-céus foram gastos $3{,}15 \times 10^4$ toneladas de aço.

4. Tem-se que $\overline{AM} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{4,62}{2} = 2,31$ metros. Assim:

$$\operatorname{tg}\left(A\hat{C}M\right) = \frac{\overline{AM}}{\overline{CM}} = \frac{2,31}{4,35} \Rightarrow A\hat{C}M = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{2,31}{4,35}\right)$$

Como $A\hat{C}B = 2A\hat{C}M$, vem que $A\hat{C}B = 2A\hat{C}M = 2\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{2,31}{4,35}\right) \approx 56^{o}$.

5.

5.1. Das rectas apresentadas, a única que é perpendicular ao plano que contém a face $[IJKL]$ é a recta CH.

Resposta: B

5.2. Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo $[BCH]$, rectângulo em C, vem que:

$$\overline{BH}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CH}^2$$

Como $\overline{BC} = 9$ cm e $\overline{CH} = 6$ cm, vem que $\overline{BH}^2 = 9^2 + 6^2 \Leftrightarrow \overline{BH}^2 = 81 + 36 \Leftrightarrow \overline{BH}^2 = 117 \Leftrightarrow \overline{BH} = \pm\sqrt{117}$.

Mas, $\overline{BH} > 0$, pelo que $\overline{BH} = \sqrt{117} \approx 10,8$ cm.

Portanto, $\overline{BH} \approx 10,8$

5.3. Tem-se que $V_{[EFGHIJKL]} = V_{[EFGHV]} - V_{[IJKLV]}$.

Assim:

- $V_{[EFGHV]} = \frac{A_{[EFGH]} \times altura_{[EFGHV]}}{3} = \frac{\overline{FG}^2 \times 24}{3} = 9^2 \times 8 = 81 \times 8 = 648$ cm³

- $V_{[IJKLV]} = \frac{A_{[IJKL]} \times altura_{[IJKLV]}}{3} \underset{i)}{=} \frac{3^2 \times (24-16)}{3} = \frac{9 \times 8}{3} = 24$ cm³

$\therefore\ V_{[EFGHIJKL]} = V_{[EFGHV]} - V_{[IJKLV]} = 648 - 24 = 624$ cm³.

i) a medida altura da pirâmide $[IJKLV]$ é igual à diferença entre a medida da altura da pirâmide $[EFGHV]$ e a distância entre os planos EFG e IJK.

Outra resolução: tem-se que $V_{[EFGHIJKL]} = V_{[EFGHV]} - V_{[IJKLV]}$.

As pirâmides $[EFGHV]$ e $[IJKLV]$ são semelhantes, de a razão de semelhança (ampliação) igual a $r = \frac{\overline{FG}}{\overline{KL}}$.

Mas como $\overline{FG} = \overline{BC} = 9$ cm e $\overline{KL} = 3$ cm, vem que $r = \frac{\overline{FG}}{\overline{KL}} = \frac{9}{3} = 3$, pelo que $\frac{V_{[EFGHV]}}{V_{[IJKLV]}} = r^3 = 3^3 = 27$.

Assim:

- $V_{[EFGHV]} = \frac{A_{[EFGH]} \times altura}{3} = \frac{\overline{FG}^2 \times 24}{3} = 9^2 \times 8 = 81 \times 8 = 648$ cm³

- $\frac{V_{[EFGHV]}}{V_{[IJKLV]}} = 27 \Leftrightarrow V_{[EFGHV]} = 27V_{[IJKLV]} \Leftrightarrow 648 = 27V_{[IJKLV]} \Leftrightarrow V_{[IJKLV]} = \frac{648}{27} \Leftrightarrow V_{[IJKLV]} = 24$ cm³

$\therefore$ $V_{[EFGHIJKL]} = V_{[EFGHV]} - V_{[IJKLV]} = 648 - 24 = 624$ cm³.

6. Tem-se que $a > b$, pelo que $a > b \underset{\times(-1)}{\Leftrightarrow} -a < -b \underset{+1}{\Leftrightarrow} 1 - a < 1 - b$.

Resposta: B

CADERNO 2

7.

7.1. Como a Carolina vai extrair ao acaso um dos sete grupos, o número de casos possíveis é 7.

O dia sábado está num e apenas num desses sete cartões grupos, pelo que o número de casos favoráveis é 1.

Logo, pela lei de Laplace, a probabilidade pedida é $\frac{1}{7}$.

7.2. Fazendo uma tabela de dupla entrada vem:

	2.ª	3.ª	4.ª	5.ª	6.ª	Sáb.	Dom.
2.ª		$(2.^a, 3.^a)$	$(2.^a, 4.^a)$	$(2.^a, 5.^a)$	$(2.^a, 6.^a)$	$(2.^a, Sáb.)$	$(2.^a, Dom.)$
3.ª			$(3.^a, 4.^a)$	$(3.^a, 5.^a)$	$(3.^a, 6.^a)$	$(3.^a, Sáb.)$	$(3.^a, Dom.)$
4.ª				$(4.^a, 5.^a)$	$(4.^a, 6.^a)$	$(4.^a, Sáb.)$	$(4.^a, Dom.)$
5.ª					$(5.^a, 6.^a)$	$(5.^a, Sáb.)$	$(5.^a, Dom.)$
6.ª						$(6.^a, Sáb.)$	$(6.^a, Dom.)$
Sáb.							$(Sáb., Dom.)$
Dom.							

Logo, o número de casos possíveis é 21 e o número de casos favoráveis é 10 (os sombreados a laranja).

Portanto, pela lei de Laplace, a probabilidade pedida é $\frac{10}{21}$.

8. Tem-se que:

▪ no primeiro dia foram recolhidas doze amostras de água, pelo que como $6\times 1=6$ e $6\times(1-1)=6\times 0=0$, as opções **A** e **C** são eliminadas;

▪ no segundo dia foram recolhidas mais seis amostras de águas, ou seja, nos dois primeiros dias foram recolhidas 18 amostras, pelo que como $12\times 2=24$ e $12+6\times(2-1)=12+6=18$, a opção **B** é eliminada e portanto só a expressão da opção **D** pode representar o número total de amostras de água recolhidas pelo aparelho ao fim de n dias.

Resposta: D

9. O ponto $A(4,-1)$ pertence à recta r, que contém a origem, pelo que o seu declive, m_r, é dado por:

$$m_r=\frac{y_A-y_O}{x_A-x_O}=\frac{-1-0}{4-0}=-\frac{1}{4}$$

Como a recta s é paralela à recta r, vem que $m_s=m_r=-\frac{1}{4}$, pelo que $s: y=-\frac{1}{4}x+b$. Como o ponto de coordenadas $(8,-5)$ pertencente à recta s, substituindo, vem $-5=-\frac{1}{4}\times 8+b \Leftrightarrow -5=-2+b \Leftrightarrow b=-3$.

Logo, $s: y=-\frac{1}{4}x-3$.

10. A área do pentágono $[ABCDE]$ é dada por $A_{[ABCDE]} = A_{[ABCE]} + A_{[CDE]}$.

Como $A_{[ABCE]} = \overline{AB} \times \overline{AE} = x \times x = x^2$ e $A_{[CDE]} = \dfrac{\overline{CE} \times 4}{2} = \dfrac{x \times 4}{2} = 2x$, vem que:

$$A_{[ABCDE]} = A_{[ABCE]} + A_{[CDE]} = x^2 + 2x = x(x+2)$$

Resposta: A

11. Tem-se que:

$$24x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 24 \times (-1)}}{2 \times 24} \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+96}}{48} \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{100}}{48} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm 10}{48} \Leftrightarrow x = \frac{-2-10}{48} \ \vee \ x = \frac{-2+10}{48} \Leftrightarrow x = -\frac{12}{48} \ \vee \ x = \frac{8}{48}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\cancel{12}}{\cancel{12} \times 4} \ \vee \ x = \frac{\cancel{8}}{\cancel{8} \times 6} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{14} \ \vee \ x = \frac{1}{6}$$

Portanto, o conjunto solução da equação dada é $\left\{ -\frac{1}{4}, \frac{1}{6} \right\}$.

12. Tem-se que:

$$\frac{1}{4}(3-x) - 2 > \frac{1}{3}x \Leftrightarrow \frac{3}{4} - \frac{x}{4} - 2 > \frac{1}{3}x \Leftrightarrow 9 - 3x - 24 > 4x \Leftrightarrow -3x - 4x > 24 - 9 \Leftrightarrow -7x > 15 \Leftrightarrow x < -\frac{15}{7}$$

Portanto, o conjunto solução da inequação dada é $\left] -\infty, -\frac{15}{7} \right[$.

13. Tem-se que $f(3) = g(4)$, pelo que, $f(3) = g(4) \Leftrightarrow a \times 3^2 = \frac{8}{4} \Leftrightarrow 9a = 2 \Leftrightarrow a = \frac{2}{9}$.

14. Tem-se que no total o aluno respondeu a 25 itens, pelo que $x + y = 25$.

Por outro lado:

- em x itens foi assinalada a opção correcta nesses, pelo que a cotação total nesses itens foi de $4x$ pontos;

- em y itens foi assinalada uma opção incorrecta nesses, pelo que a cotação total nesses itens foi de $-y$ pontos.

Logo, como a cotação foi de 70 pontos, vem que $4x - y = 70$.

Portanto, um sistema de equações, com incógnitas x e y, que permite determinar o número de itens em que foi assinalada a opção correcta e o número de itens em que foi assinalada uma opção incorrecta é:

$$\begin{cases} x+y=25 \\ 4x-y=70 \end{cases}$$

15. Tem-se que, $\dfrac{6^{-4}}{\left(2^4\right)^2\times 3^8}=\dfrac{6^{-4}}{2^{4\times 2}\times 3^8}=\dfrac{6^{-4}}{2^8\times 3^8}=\dfrac{6^{-4}}{\left(2\times 3\right)^8}=\dfrac{6^{-4}}{6^8}=6^{-4-8}=6^{-12}=\left(\dfrac{1}{6}\right)^{12}$.

16. Tem-se que $T_{\overrightarrow{GE}}\circ T_{\overrightarrow{EH}}=T_{\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{EH}}=T_{\overrightarrow{GH}}$.

Mas $\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{ED}$, pelo que $T_{\overrightarrow{GH}}=T_{\overrightarrow{ED}}$ e portanto, a imagem do ponto E pela composta da translação de vector $\overrightarrow{GE}$ ($T_{\overrightarrow{GE}}$) com a translação de vector $\overrightarrow{EH}$ ($T_{\overrightarrow{EH}}$) é $E+\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{EH}=E+\overrightarrow{GH}=E+\overrightarrow{ED}=D$.

$\therefore$ A imagem do ponto E pela composta da translação $T_{\overrightarrow{GE}}$ com a translação $T_{\overrightarrow{EH}}$ é o ponto D.

Outra resolução: tem-se que:

- a imagem de E pela translação $T_{\overrightarrow{EH}}$ é o ponto H: $E+\overrightarrow{EH}=H$
- a imagem de H pela translação $T_{\overrightarrow{GE}}$ é o ponto D: $H+\overrightarrow{GE}\underset{\overrightarrow{GE}=\overrightarrow{HD}}{=}H+\overrightarrow{HD}=D$

$\therefore$ A imagem do ponto E pela composta da translação $T_{\overrightarrow{GE}}$ com a translação $T_{\overrightarrow{EH}}$ é o ponto D.

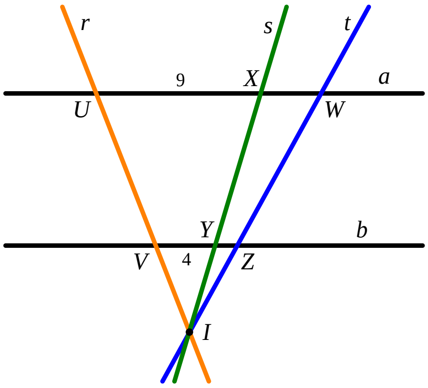
17. Tem-se que:

- $AD=CAD-AC=180^\circ-110^\circ=70^\circ$
- $B\hat{C}A=\dfrac{AD}{2}$, pelo que $B\hat{C}A=\dfrac{70^\circ}{2}=35^\circ$
- $B\hat{A}C+B\hat{C}A+C\hat{B}A=180^\circ$, pelo que:

$$B\hat{A}C+B\hat{C}A+C\hat{B}A=180^\circ\Leftrightarrow 25^\circ+35^\circ+C\hat{B}A=180^\circ\Leftrightarrow 60^\circ+C\hat{B}A=180^\circ\Leftrightarrow C\hat{B}A=120^\circ$$

$\therefore\ C\hat{B}A=120^\circ$

18. Seja I o ponto de intersecção das três rectas:



Tem-se que:

▪ os triângulos $[UIX]$ e $[VIY]$ são semelhantes pois têm dois ângulos iguais: o ângulo UIX é comum aos dois triângulos e os ângulos XUI e YVI são iguais por serem de lados paralelos.

Logo, $\frac{\overline{XY}}{\overline{YI}} = \frac{\overline{UX}}{\overline{VY}} \Leftrightarrow \frac{\overline{XY}}{\overline{YI}} = \frac{9}{4}$.

▪ os triângulos $[XIW]$ e $[YIZ]$ são semelhantes pois têm dois ângulos iguais: o ângulo XIW é comum aos dois triângulos e os ângulos WXI e ZYI são iguais por serem de lados paralelos.

Logo, $\frac{\overline{XY}}{\overline{YI}} = \frac{\overline{XW}}{\overline{YZ}} \underset{\frac{\overline{XY}}{\overline{YI}} = \frac{9}{4}}{\Leftrightarrow} \frac{\overline{XW}}{\overline{YZ}} = \frac{9}{4}$.

$\therefore \frac{\overline{XW}}{\overline{YZ}} = \frac{9}{4}$

Resposta: C

FIM