

Taxa Média de Variação

e

Taxa Instantânea de Variação

Admite que, num dado instante, um balão foi lançado e a altura do balão ao solo, t minutos após o lançamento é dada, em metros, pela função f , sendo $f(t) = -t^2 + 15t + 2$.

A seguir, em referencial ortogonal, está representada a função f .



- 1 A variação da função f no intervalo $[a, b]$ é dada por $f(b) - f(a)$.
Determina a variação da altura, em metros, no intervalo $[4, 8]$
- 2 A taxa média de variação de f entre a e b (ou em $[a, b]$), em m/min, é dada por $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.
Determina a taxa média de variação de f em $[4, 8]$

Novo Espaço
Porto Editora

$$1. \text{Variação da altura} = f(8) - f(4) = 58 - 46 = 12$$

$$2. \text{Taxa média de variação no intervalo } [4,8] = \frac{f(8) - f(4)}{8 - 4} = \frac{12}{4} = 3$$

$$t.m.v(f, 4, 8) = t.m.v[4,8]$$

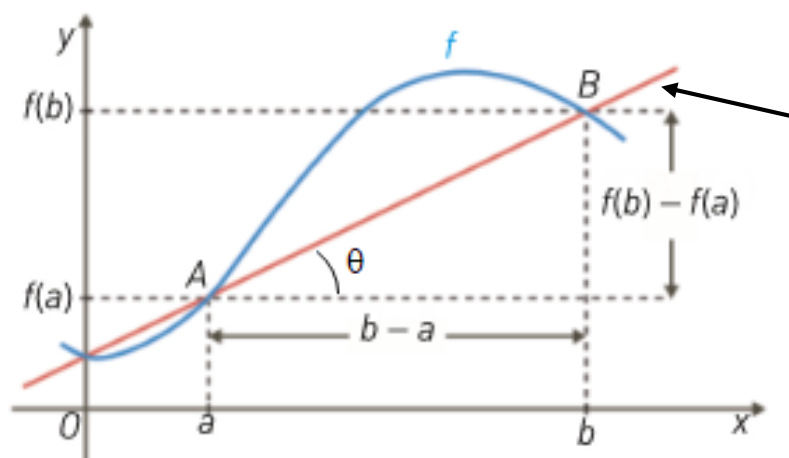
Taxa Média de Variação

Dada uma função real de variável real f e dois pontos a e b do seu domínio, chama-se **taxa média de variação de f entre a e b** a:

$$t.m.v.(f, a, b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

- $b-a$ representa a variação de x ;
- $f(b)-f(a)$ representa a variação de $f(x)$ quando x varia de a para b ;
- $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ representa a variação de $f(x)$ por cada unidade de variação de x quando o seu valor passa de a para b ;

Interpretação geométrica da Taxa média de variação



Reta secante ao gráfico de f , definida pelos pontos $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$

O declive da reta AB , $m_{AB} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \operatorname{tg}\theta$

1. Seja f uma função e domínio \mathbb{R} .

Sabe-se que: $\forall h \in \mathbb{R}, f(3+h) - f(3) = h^2 + 6h$

1.1 Determine o valor da $t.m.v.$ _[3,5]

Adaptado Novo Espaço
Porto Editora

$$t.m.v.[3,5] = \frac{f(5) - f(3)}{5 - 3} = \frac{16}{2} = 8$$

$$h = 2$$

$$f(5) - f(3) = 4 + 12 = 16$$

1.2 Sabendo que $f(3)=1$, escreva a equação da reta secante ao gráfico da função f , que passa nos pontos de abcissas 3 e 5.

Seja s a reta secante

$$m_s = t.m.v.[3,5] = 8 \quad s : y = 8x + b$$

$$(3,1) \in s \Leftrightarrow 1 = 8 \times 3 + b \Leftrightarrow b = -23$$

$$s : y = 8x - 23$$

2. Relativamente a uma função f , sabe-se que $t.m.v.[a,b]$ é positiva.

Indica se são verdadeiras ou falsas as afirmações:

I: $f(b) > f(a)$

II: f é necessariamente crescente em $[a,b]$

Novo Espaço
Porto Editora

R: A afirmação I é verdadeira e a afirmação II é falsa

3. Considera, num referencial o.n., o gráfico de uma função f e a reta r que intersesta o gráfico de f nos pontos A e B de abcissas, respetivamente, a e b .

Sabe-se que:

- A reta r intersesta o eixo Ox no ponto de abcissa 3;
- A taxa média de variação de f entre a e b é igual a -2.

Escreva a equação reduzida da reta r .

MVT11
Texto

$$(3,0) \in r \quad \wedge \quad m_r = t.m.v.[a,b] = -2$$

$$\text{logo} \quad r : y = -2x + b$$

$$(3,0) \in r \Leftrightarrow 0 = -6 + b \Leftrightarrow b = 6$$

$$r: y = -2x + 6$$

Taxa instantânea de variação de f num ponto. Derivada de uma função num ponto

Seja f uma função real de variável real e x_0 um ponto do seu domínio.

Chama-se **taxa instantânea de variação de f em x_0** ou **derivada de f no ponto x_0** , ao limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

caso exista e seja finito, e representa-se por $f'(x_0)$.

Diz-se neste caso que f é **derivável** ou **diferenciável em x_0** .

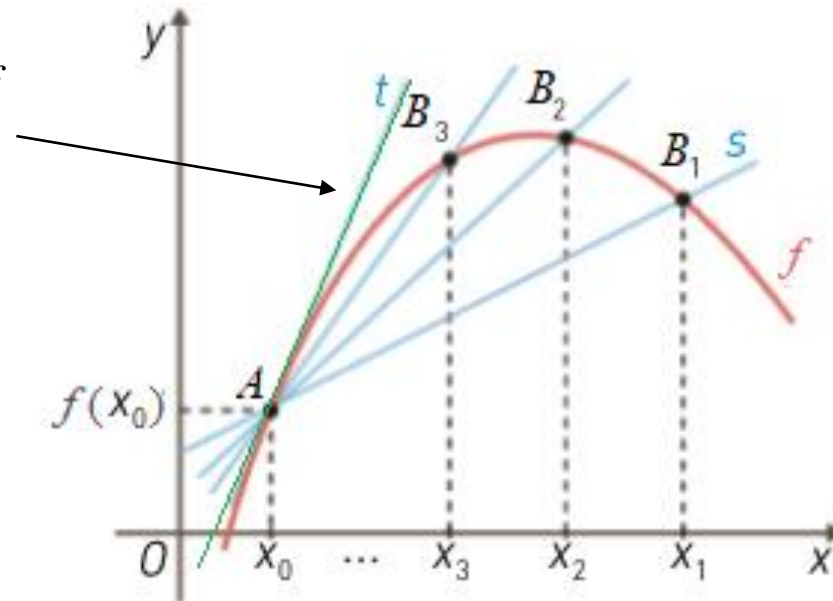
Nota: se fizermos uma mudança de variável : $x - x_0 = h$

a fórmula da derivada toma outra forma:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Interpretação geométrica da derivada

Reta tangente ao gráfico de f
no ponto $A(x_0, f(x_0))$



declive da reta t :
$$m_t = f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

1. Utilizando a definição de derivada num ponto calcule $g'(-1)$, sendo g a função definida por $g(x) = 2x^2 - x$

$$g'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x) - g(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - x - 3}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(x - \frac{3}{2})(x + 1)}{x + 1}$$

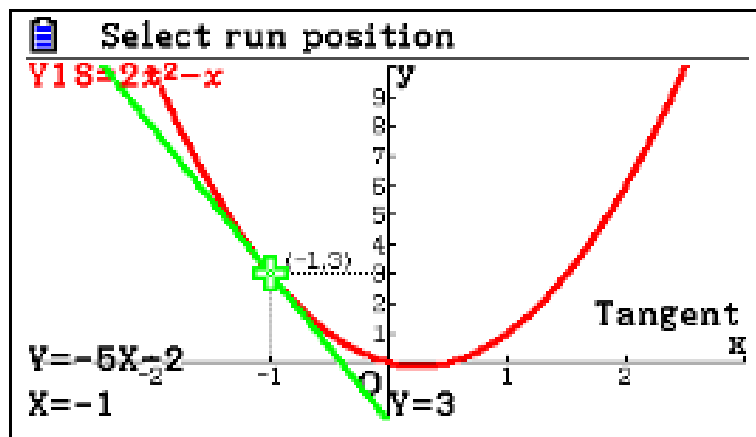
$$= \lim_{x \rightarrow -1} 2(x - \frac{3}{2}) = 2 \times (-\frac{5}{2}) = -5$$

C.A.

$$g(-1) = 2 \times (-1)^2 - (-1) = 3$$

$$2x^2 - x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \vee x = -1$$



2. Considere a função f definida em \mathbb{R}^+ por $f(x) = \frac{x^3}{6}$

2.1 Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa $\sqrt{3}$.

2.2 Sabendo que a reta r tangente ao gráfico de f num ponto $x=a$ é perpendicular à reta s , de equação $y = -4x + 2$, determine o valor de a .

Adaptado Máximo 11
Porto Editora

2.1 Seja t a reta tangente ao gráfico de f no ponto $x = \sqrt{3}$

$$m_t = f'(\sqrt{3}) = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{f(x) - f(\sqrt{3})}{x - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{\frac{x^3}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}}{x - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^3 - 3\sqrt{3}}{6(x - \sqrt{3})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{(x - \sqrt{3})(x^2 + \sqrt{3}x + 3)}{6(x - \sqrt{3})} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{(x^2 + \sqrt{3}x + 3)}{6} = \frac{3 + 3 + 3}{6} = \frac{3}{2}$$

Então $t: y = \frac{3}{2}x + b$. Como $(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}) \in t \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} \times \sqrt{3} + b \Leftrightarrow b = -\sqrt{3}$

Portanto: $t: y = \frac{3}{2}x - \sqrt{3}$

C.A.

$$f(\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Regra de Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrr} \sqrt{3} & 1 & 0 & 0 & -3\sqrt{3} \\ & & \sqrt{3} & & \\ \hline & 1 & \sqrt{3} & 3 & 0 \end{array}$$

2.2 Sabendo que a reta r , tangente ao gráfico de f num ponto $x=a$, é perpendicular à reta s , de equação $y = -4x + 2$, determine o valor de a .



$$r \perp s \Rightarrow m_r = -\frac{1}{m_s} \Rightarrow m_r = \frac{1}{4}$$

$$\text{Então } f'(a) = \frac{1}{4} \text{ isto é } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{1}{4}$$

Regra de Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & -a^3 \\ a & & a & a^2 & a^3 \\ \hline & 1 & a & a^2 & 0 \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{x^3}{6} - \frac{a^3}{6}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - a^3}{6(x - a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)(x^2 + ax + a^2)}{6(x - a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 + ax + a^2}{6} =$$

$$= \frac{3a^2}{6} = \frac{a^2}{2}$$

$$\text{Então } \frac{a^2}{2} = \frac{1}{4} \text{ isto é } a = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Como } a \in \mathbb{R}^+ \text{ então } a = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

3. Na figura estão representadas, em referencial o.n. xOy , parte do gráfico da função f , definida por $f(x)=x^2-4x+5$; a reta r , tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 1; e o triângulo $[OBA]$, sendo A e B os pontos de interseção de r com os eixos Ox e Oy , respectivamente.

Calcule a área do triângulo.

$$A_{[OBA]} = \frac{\overline{OA} \times \overline{OB}}{2} = \frac{2 \times 4}{2} = 4$$

$$m_r = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 5 - 2}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x - 3)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 3) = -2$$

Então $r : y = -2x + b$.

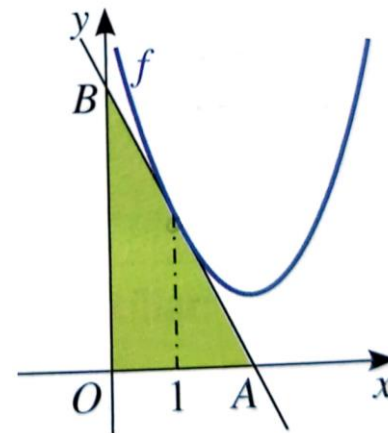
$(1, 2) \in r \Rightarrow 2 = -2 + b \Rightarrow b = 4$

$r : y = -2x + 4$.

Se $y = 0 \Rightarrow x = 2$

Se $x = 0 \Rightarrow y = 4$

$A(2, 0)$ e $B(0, 4)$



Dimensões 11
Santilhana

C.A.

- $f(1) = 1^2 - 4 \times 1 + 5 = 2$
- $x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} \Leftrightarrow \Leftrightarrow x = 3 \vee x = 1$



Exercícios que podem resolver nos vossos manuais

- Determinação do valor da taxa média de variação num intervalo
- Determinação da derivada de uma função num ponto
- Interpretação geométrica da taxa média de variação num intervalo e da derivada de uma função num ponto