

Canguru Matemático sem Fronteiras 2019

Categoria: Júnior

Duração: 1h 30min

Destinatários: alunos dos 10.º e 11.º anos de escolaridade

Nome: _____ Turma: _____

Não podes usar calculadora. Em cada questão deves assinalar a resposta correta. As questões estão agrupadas em três níveis: Problemas de 3 pontos, Problemas de 4 pontos e Problemas de 5 pontos. Inicialmente tens 30 pontos. Por cada questão correta ganhas tantos pontos quantos os do nível da questão, no entanto, por cada questão errada és penalizado em $1/4$ dos pontos correspondentes a essa questão. Não és penalizado se não responderes a uma questão, mas infelizmente também não adicionas pontos.

Problemas de 3 pontos

1. Qual é o valor de $20 \times 19 + 20 + 19$?

- (A) 389 (B) 399 (C) 409 (D) 419 (E) 429

2. Um comboio de brincar demora exatamente 1 minuto e 11 segundos a percorrer uma pista. Quanto tempo demora a percorrer seis vezes a mesma pista?

- (A) 6 minutos e 56 segundos (B) 7 minutos e 6 segundos (C) 7 minutos e 16 segundos
(D) 7 minutos e 26 segundos (E) 7 minutos e 36 segundos

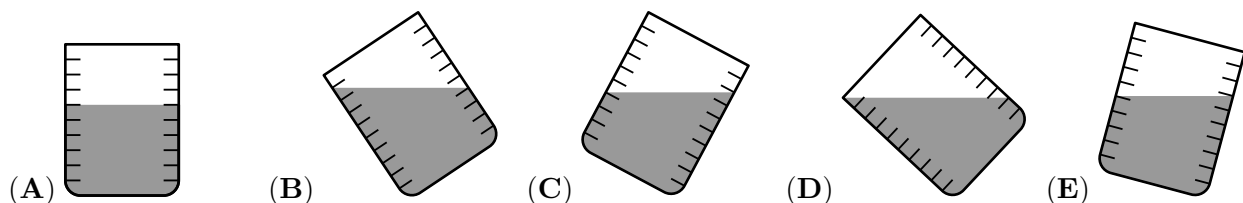
3. Um barbeiro quer escrever a palavra **CORTE** num quadro de tal modo que, quando um cliente olhar para o espelho, possa ler a palavra corretamente. Como deve o barbeiro escrever a palavra no quadro?

- (A) **CORTE** (B) **CORTE** (C) **ETROC** (D) **ETROC** (E) **ETROC**

4. Lançando simultaneamente três dados cúbicos, com as faces numeradas de 1 a 6, e adicionando os pontos das faces voltadas para cima, quantas somas diferentes se podem obter?

- (A) 14 (B) 15 (C) 16 (D) 17 (E) 18

5. Os cinco copos idênticos, representados abaixo, têm água. Quatro deles contêm a mesma quantidade de água. Qual deles contém uma quantidade diferente de água ?



6. Um parque tem cinco acessos que são simultaneamente locais de entrada e de saída. A Mónica quer entrar por um acesso e sair por outro. De quantas maneiras diferentes pode ela entrar e sair do parque?

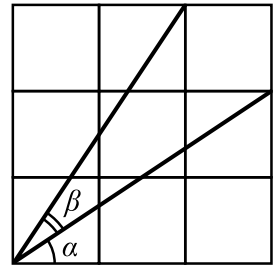
- (A) 25 (B) 20 (C) 16 (D) 15 (E) 10

7. O peso de cada um de três cangurus é um número inteiro e os três cangurus têm pesos diferentes. O peso total deles é 97 kg. Quanto pode, no máximo, pesar o mais leve?

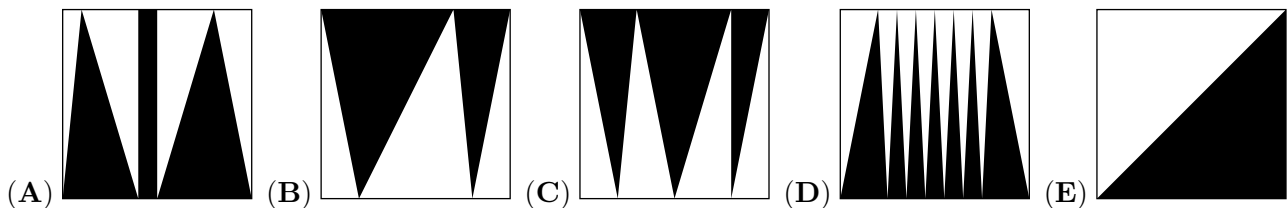
- (A) 1 kg (B) 30 kg (C) 31 kg (D) 32 kg (E) 33 kg

8. Na figura ao lado estão marcados nove quadrados geometricamente iguais. Relativamente aos ângulos assinalados, qual das seguintes afirmações é verdadeira?

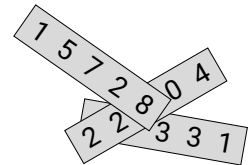
- (A) $\alpha = \beta$ (B) $2\alpha + \beta = 90^\circ$
 (C) $\alpha + \beta = 60^\circ$ (D) $2\beta + \alpha = 90^\circ$
 (E) $\alpha + \beta = 45^\circ$



9. Em cada um de cinco quadrados brancos de lado unitário foram pintadas, de preto, regiões triangulares ou retangulares. Em qual dos cinco quadrados a região pintada tem a maior área?



10. Em cada um de três pedaços de papel foi escrito um número de cinco algarismos, conforme a figura ao lado mostra. Três dos algarismos estão cobertos. Sabendo que a soma dos três números é 57263, quais são os algarismos cobertos?



- (A) 0, 2 e 2 (B) 1, 2 e 9 (C) 2, 4 e 9
 (D) 2, 7 e 8 (E) 5, 7 e 8

Problemas de 4 pontos

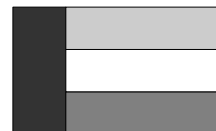
11. Um quadrado tem vértices A , B , C e D , assinalados no sentido horário. Constrói-se um triângulo equilátero de vértices A , E e C , com os vértices indicados no sentido horário. Qual é a amplitude do ângulo CBE ?

- (A) 30° (B) 45° (C) 135° (D) 145° (E) 150°


12. As letras a , b , c e d representam quatro números inteiros distintos escolhidos entre 1 e 10, inclusive. Qual é o menor valor possível para a expressão $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$?

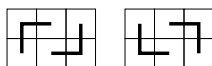
- (A) $\frac{2}{10}$ (B) $\frac{3}{19}$ (C) $\frac{14}{45}$ (D) $\frac{29}{90}$ (E) $\frac{25}{72}$

13. A bandeira de Canguria, representada na figura ao lado, é um retângulo com as medidas laterais na proporção $3 \div 5$. A bandeira está dividida em quatro retângulos de igual área. Qual é a proporção entre as medidas laterais do retângulo branco?

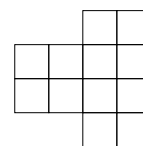


- (A) $1 \div 3$ (B) $1 \div 4$ (C) $2 \div 7$ (D) $3 \div 10$ (E) $4 \div 15$

14. Um retângulo de dimensões 3×2 pode ser coberto por peças em L, da forma , exatamente de duas maneiras diferentes, como se pode ver na figura abaixo.



De quantos modos diferentes pode ser coberta a figura ao lado, usando peças da forma indicada?



- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 48

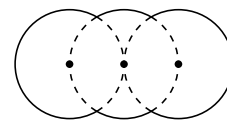
15. O triatlo é uma modalidade que consiste na combinação de natação, corrida e ciclismo. A parte do ciclismo corresponde a três quartos da distância total percorrida na prova e a da corrida a um quinto. A distância a ser percorrida na natação é de 2 km. Qual é a distância total percorrida nesta prova?

- (A) 10 km (B) 20 km (C) 38 km (D) 40 km (E) 60 km

16. Para obter um certo sumo de laranja diluído devemos juntar sumo concentrado de laranja e água na proporção de $1 \div 7$ por unidade de volume. O concentrado de laranja está num frasco de 1 litro, que está cheio até meio. Que fração deste sumo concentrado deve ser utilizada para obter 2 litros de sumo de laranja diluído?

- (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{2}{7}$ (D) $\frac{4}{7}$
 (E) Todo o sumo concentrado

17. A figura ao lado é constituída por partes de três círculos de raio R , cujos centros estão sobre uma reta. O círculo do meio passa pelos centros dos outros dois, como se pode ver. Qual é a medida do perímetro da figura?



- (A) $\frac{10\pi R}{3}$ (B) $\frac{5\pi R}{3}$ (C) $\frac{2\pi R\sqrt{3}}{3}$ (D) $2\pi R\sqrt{3}$ (E) $4\pi R$

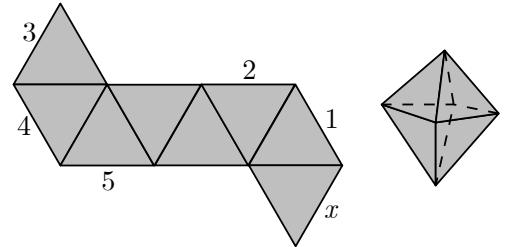
18. A soma dos sete algarismos de um certo número de telefone da forma $aaabbbb$ é igual ao número ab (constituído pelos algarismos a e b). Qual é o valor de $a + b$?

- (A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 11 (E) 12

19. Foram embaladas 60 maçãs e 60 peras em caixas, de modo a que cada caixa contenha o mesmo número de maçãs e a que não haja duas caixas contendo o mesmo número de peras. Qual é o maior número possível de caixas que podem ter sido utilizadas para acondicionar a fruta desta forma?

- (A) 20 (B) 15 (C) 12 (D) 10 (E) 6

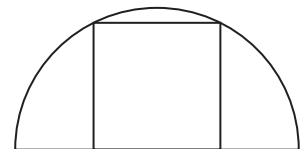
20. Na figura ao lado está representada uma planificação de um octaedro. Quando esta é dobrada para formar o octaedro, qual dos segmentos de reta, assinalados com os números 1, 2, 3, 4 e 5, coincidirá com o segmento de reta assinalado com x ?



- (A) 1 (B) 2 (C) 3
(D) 4 (E) 5

Problemas de 5 pontos

21. Um quadrado tem dois dos seus vértices sobre uma semicircunferência e os outros dois no diâmetro da semicircunferência, como se pode ver na figura ao lado. Se o raio da semicircunferência é 1 cm, qual é a área do quadrado?



- (A) $\frac{4}{5}$ cm² (B) $\frac{\pi}{4}$ cm² (C) 1 cm² (D) $\frac{4}{3}$ cm² (E) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ cm²

22. Dois pontos estão marcados sobre um disco circular que está a rodar em torno de seu centro a uma velocidade constante. Um deles está 3 cm mais longe do centro do disco do que o outro. O ponto mais afastado do centro move-se a uma velocidade que é 2,5 vezes a velocidade do outro ponto. Qual é a distância do centro do disco ao ponto mais afastado?

- (A) 10 cm (B) 9 cm (C) 8 cm (D) 6 cm (E) 5 cm

23. Os números inteiros de 1 a 99 estão escritos por ordem crescente e sem espaços entre eles. Esta sequência de algarismos foi dividida em ternos de três algarismos:

$$123456789101112 \dots 979899 \longrightarrow (123)(456)(789)(101)(112) \dots (979)(899).$$

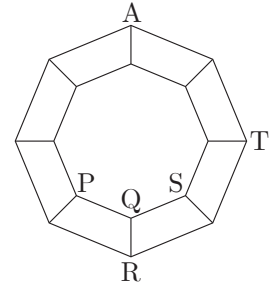
Qual dos seguintes não pode ser um destes ternos?

- (A) (222) (B) (444) (C) (464) (D) (646) (E) (888)

24. Quantos planos passam exatamente por três dos vértices de um dado cubo?

- (A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 8 (E) 12

25. Na figura ao lado temos um grafo com 16 vértices e algumas arestas que os unem. Uma formiga está no vértice assinalado com A . Ela pode movimentar-se ao longo do grafo do seguinte modo: em cada movimento pode deslocar-se para um vértice vizinho seguindo por uma das arestas que os une. Depois de 2019 movimentos em qual dos vértices P , Q , R , S ou T pode estar a formiga?



- (A) Só no P , R ou S , mas não no Q , nem no T (B) Só no P , R , S ou T , mas não no Q
 (C) Só no Q (D) Só no T
 (E) Em qualquer um desses vértices

26. As letras a , b e c representam números inteiros positivos. Cada um destes números tem três algarismos e, em cada um deles, o primeiro algarismo é igual ao último. Se $b = 2a + 1$ e $c = 2b + 1$, quantas possibilidades existem para o número a ?

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) Mais de 3

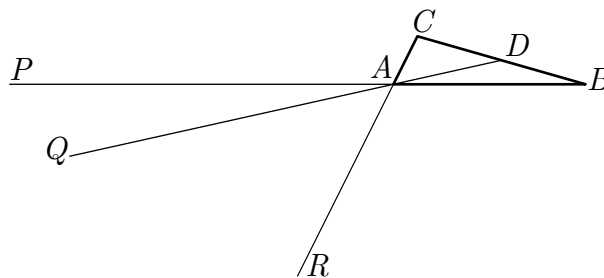
27. Em cada vértice de um quadrado é marcado um número inteiro positivo. Para quaisquer dois números unidos por um lado do quadrado, um deles é múltiplo do outro. No entanto, para quaisquer dois números diagonalmente opostos, nenhum é múltiplo do outro. Qual é a menor soma possível dos quatro números?

- (A) 12 (B) 24 (C) 30 (D) 35 (E) 60

28. Qual é o menor número de elementos que temos de retirar ao conjunto $\{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90\}$ de modo a que o produto dos elementos que ficam seja um quadrado perfeito?

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

29. Seja $[ABC]$ um triângulo cuja medida da área é S e seja D o ponto médio do segmento $[BC]$. Se P , Q e R são pontos das retas AB , AD e AC , respectivamente, conforme a figura abaixo mostra, tais que $\overline{AP} = 2 \overline{AB}$, $\overline{AQ} = 3 \overline{AD}$ e $\overline{AR} = 4 \overline{AC}$, qual é a medida da área do triângulo $[PQR]$?



- (A) S (B) $2S$ (C) $3S$ (D) $\frac{1}{2}S$
 (E) 0 (i.e. P , Q , R são colineares)

30. Se for retirado um qualquer algarismo a um certo número natural de quatro algarismos, obtém-se um número de três algarismos que é um divisor do número original. Quantos números de quatro algarismos têm esta propriedade?

- (A) 5 (B) 9 (C) 14 (D) 19 (E) 23