



---

**Duração do Exame: 150 minutos + 30 minutos de tolerância | junho de 2020**

---

**12.º Ano de Escolaridade**

---

Utiliza apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta

É permitido o uso de calculadora

Não é permitido o uso de corretor. Risca o que pretendes que não seja classificado

Para cada resposta identifica o item

Apresenta as tuas respostas de forma legível

Apresenta apenas uma resposta para cada item

A prova apresenta um formulário na página 2

As cotações dos itens encontram-se na página 7

---

Na resposta aos itens de seleção (escolha múltipla), seleciona a resposta correta. Escreve na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresenta o teu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiveres de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida aproximação apresenta sempre o valor exato.

---

### NOTA

\* Itens cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final:

9, 11, 12.1 e 12.2

Estes itens estão assinalados no enunciado a cor azul e em itálico

\* Dos restantes 14 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação

# Formulário

---

## Geometria

**Comprimento de um arco de circunferência:**

$\alpha r$  ( $\alpha$  - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;  $r$  - raio)

**área de um polígono regular:**  $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

**área de um setor circular:**

$\frac{\alpha r^2}{2}$  ( $\alpha$  - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro,  $r$  - raio)

**área lateral de um cone:**  $\pi r g$  ( $r$  - raio da base,  $g$  - geratriz)

**área de uma superfície esférica:**  $4\pi r^2$  ( $r$  - raio)

**Volume da pirâmide:**  $\frac{1}{3} \times \text{área da base} \times \text{Altura}$

**Volume do cone:**  $\frac{1}{3} \times \text{área da base} \times \text{Altura}$

**Volume da esfera:**  $\frac{4}{3}\pi r^3$  ( $r$  - raio)

## Progressões

Soma dos  $n$  primeiros termos de uma progressão ( $u_n$ ):

**Progressão aritmética:**  $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

**Progressão geométrica:**  $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$ ,  $r \neq 1$

## Trigonometria

$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

## Complexos

$(|z|e^{i\theta})^n = |z|^n e^{i(n\theta)}$

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} e^{i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)}$ ,  $k \in \{0; 1; 2; \dots; n - 1\}$  e  $n \in \mathbb{N}$

## Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u^n)' = nu^{n-1}u'$  ( $n \in \mathbb{R}$ )

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'e^u$

$(a^u)' = u'a^u \ln a$  ( $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ )

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$  ( $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ )

## Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$  ( $n \in \mathbb{N}$ )

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$  ( $p \in \mathbb{R}$ )

1. Seja  $\mathbb{C}$ , o conjunto dos números complexos e seja  $z = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$ , um número complexo

1.1. Prova que o afixo do número complexo  $z^{8n+1}$  pertence ao conjunto  $A = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(w) = \operatorname{Im}(\bar{w})\}$ , para todo o número natural  $n$

1.2. Em qual das opções estão os valores de  $a$  e  $b$ ,  $\in \mathbb{R}$ , para os quais,  $z$  é solução da equação

$$w^2 + aw + \sqrt{2}b = 0$$

- (A)  $a = -2\sqrt{2}$  e  $b = 2\sqrt{2}$
- (B)  $a = 2\sqrt{2}$  e  $b = -2\sqrt{2}$
- (C)  $a = -2\sqrt{2}$  e  $b = -2\sqrt{2}$
- (D)  $a = 2\sqrt{2}$  e  $b = 2\sqrt{2}$

2. Considera um tabuleiro com dezasseis casas (quadrado dividido em dezasseis quadrados)

Pretende-se colocar nove cartões no tabuleiro, um e um só, em cada casa, sendo quatro vermelhos, numerados de um a quatro, e cinco azuis, numerados de cinco a nove

2.1. De quantas maneiras distintas se podem colocar os cartões no tabuleiro?

Numa das opções está a resposta a esta questão  
Em qual delas?

- (A) 4151347200
- (B) 34594560
- (C) 1441440
- (D) 172972800

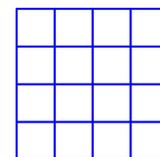


Figura 1

2.2. Determina a probabilidade de os quatro cantos do tabuleiro ficarem preenchidos só com cartões vermelhos

3. Considera a função  $f$ , de domínio  $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ , definida por  $f(x) = \frac{4x \cos(x) - 2 \sin(x)}{\cos(x)}$

No referencial cartesiano  $xOy$ , da figura 2, estão representados parte do gráfico da função  $f$ , e as suas assíntotas verticais

3.1. Mostra, analiticamente, que o gráfico da função  $f$  tem duas assíntotas verticais e escreve as suas equações

3.2. Estuda a função  $f$  quanto à monotonia e existência de extremos relativos

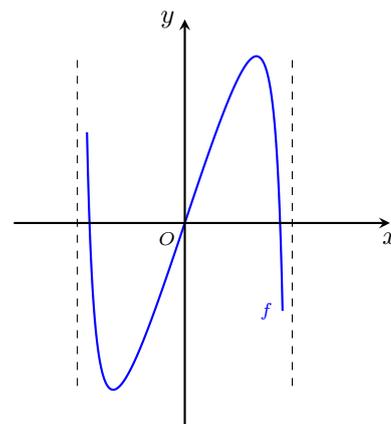


Figura 2

4. Considera a função  $g$ , de domínio  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , definida por  $g(x) = \begin{cases} \frac{-x + \ln(-x + 1)}{x} & \text{se } x < 0 \\ \frac{xe^x - x + x^2}{x^2} & \text{se } x > 0 \end{cases}$

No referencial cartesiano  $xOy$ , da figura 3, está representado parte do gráfico da função  $g$ , e estão assinalados dois valores  $a$  e  $b$ , no eixo das ordenadas

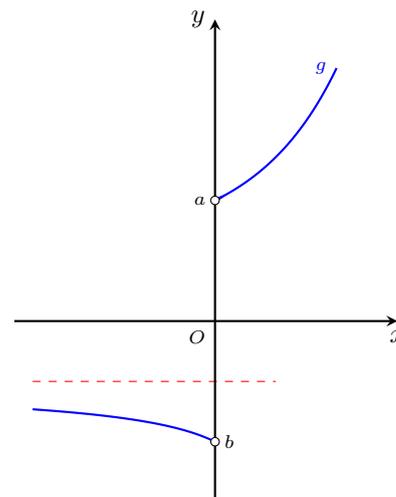


Figura 3

5. Na figura 4 está representada a pirâmide  $[ABCDV]$ , quadrangular regular reta. Sabe-se que:

- a base  $[ABCD]$  é um quadrado de lado  $l$ , com  $l > 0$
- o ponto  $U$  é o centro da base da pirâmide
- $T$  é o ponto médio da aresta  $[BC]$
- $x$  é amplitude do ângulo  $UTV$
- $x \in ]0; \frac{\pi}{2}[$

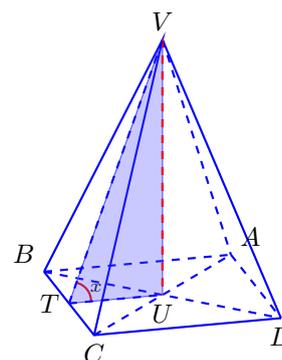


Figura 4

Em qual das opções está a expressão, em função de  $x$  e de  $l$ , da área da superfície da pirâmide?

- (A)  $l + \frac{l}{\cos(x)}$   
 (B)  $l^2 + \frac{l^2}{\sin(x)}$   
 (C)  $l^2 + \frac{l^2}{\cos(x)}$   
 (D)  $l^2 + \frac{l^2}{4 \cos(x)}$

6. Relativamente a uma turma de 12º ano da Escola Secundária de Arribas de Cima, sabe-se que:

- $\frac{2}{5}$  dos alunos são raparigas
- $\frac{4}{5}$  dos alunos estão inscritos no clube de leitura da Biblioteca
- $\frac{1}{5}$  das raparigas não estão inscritos no clube de leitura da Biblioteca

Determina a probabilidade de um aluno dessa turma, escolhido ao acaso, ser rapaz, sabendo que está inscrito no clube de leitura da Biblioteca

Apresenta o resultado na forma de fração irredutível

7. Considera a função  $h$ , de domínio  $]e; +\infty[$ , definida por  $h(x) = \ln(x - e)$

No referencial cartesiano  $xOy$ , da figura 5, está representado parte do gráfico da função  $h$ , e estão assinalados dois pontos  $A(a; h(a))$  e  $B(b; h(b))$  no gráfico

Sabe-se que:

- $b > a$
- $h(b) = h(a) + \ln(2)$
- o declive da reta  $AB$  é  $m_{AB} = \frac{\ln(\sqrt{2})}{e}$

Mostra que a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de  $h$  no ponto  $A$  é  $y = \frac{1}{2e}x + \ln(2) - \frac{1}{2}$

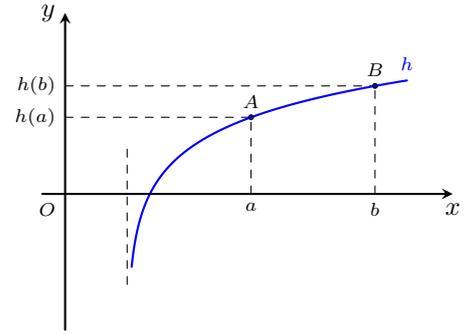


Figura 5

8. Seja  $f$ , uma função real de variável de domínio  $\mathbb{R}^+$ , e seja  $g$ , a função real de variável real, definida em  $\mathbb{R}^+$  por  $g(x) = \frac{f^3(x) + e^{3x}}{x^2}$

No referencial cartesiano  $xOy$ , da figura 6, estão representados parte do gráfico da função  $f$ , e da sua assíntota não vertical

Sabe-se que a assíntota ao gráfico de  $f$  interseca o eixo  $Ox$  no ponto de abscissa  $\frac{1}{2}$ , e interseca o eixo  $Oy$ , no ponto de ordenada  $-1$

Em qual das opções está o valor de  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$ ?

- (A) 8  
 (B)  $-8$   
 (C) 0  
 (D)  $+\infty$

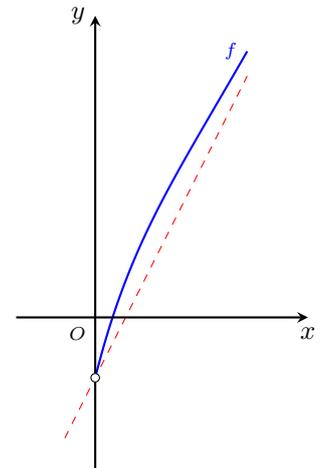


Figura 6

9. Na figura 7 está representado, em referencial cartesiano  $xOy$ , parte do gráfico de uma função  $f$ , real de variável real, de domínio  $\mathbb{R}$

Seja  $(x_n)$ , uma sucessão de valores do domínio da função  $f$

Sabe-se que:

- $a, b, c, d$  são números reais, tais que  $a > b > c > d$
- $\lim f(x_n) = a$

Em qual das opções pode estar a sucessão  $(x_n)$ ?

- (A)  $x_n = e - \frac{1}{\sqrt{\ln(n+1) + 1}}$   
 (B)  $x_n = 1 - \frac{2}{\sqrt{e^n + 1}}$   
 (C)  $x_n = e + \ln(e) - \frac{\sqrt{n}}{n}$   
 (D)  $x_n = e + 1 + \frac{n}{e^n}$

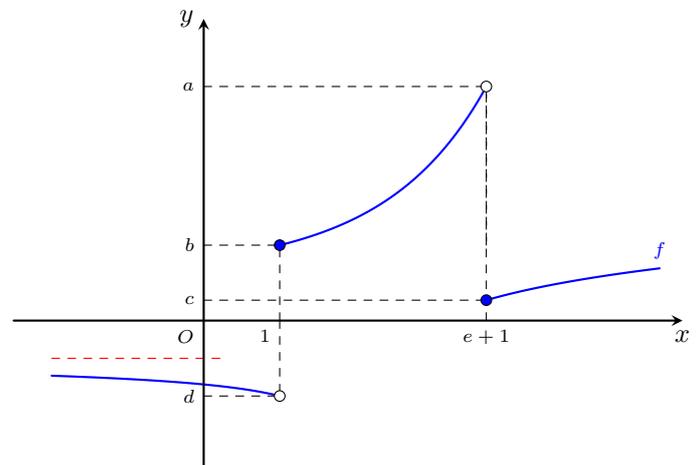


Figura 7

10. Considera, num referencial *o.n.*,  $Oxyz$ , o sólido que pode ser decomposto em duas pirâmides quadrangulares regulares retas,  $[ABCDV]$  e  $[EFGHV]$ , que se encontra representado na figura 8

Sabe-se que:

- o ponto  $A$  pertence ao eixo  $Ox$
- o ponto  $D$  pertence ao eixo  $Oy$
- os pontos  $A, B, C$  e  $D$ , são as projeções ortogonais dos pontos  $E, F, G$  e  $H$ , respetivamente, sobre o plano  $xOy$
- a base da pirâmide  $[ABCDV]$  está contida no plano  $xOy$
- a base da pirâmide  $[EFGHV]$  está contida num plano paralelo ao plano  $xOy$
- a abcissa do ponto  $A$  é igual à ordenada do ponto  $D$
- as duas pirâmides têm a mesma altura
- uma equação vetorial da reta  $AG$  é

$$(x; y; z) = (3; -6; -9) + k(0; 2; 3), k \in \mathbb{R}$$

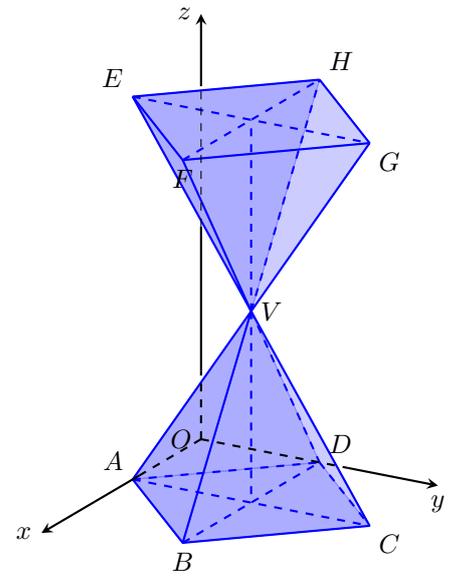


Figura 8

**10.1.** Determina o volume do sólido

**10.2.** Sabe-se que uma equação cartesiana do plano  $ABV$  é  $-3x + 3y - 2z + 9 = 0$

Escreve uma equação cartesiana de um plano  $\alpha$ , perpendicular ao plano  $ABV$  e que contém o ponto  $V$

Escreve a equação na forma  $ax + by + cz + d = 0$ , com  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

11. Sabe-se que  $\frac{2}{e^{-2}}$ ,  $\frac{a}{16}$  e  $512e^{10}$ , com  $a \in \mathbb{R}$ , são três termos consecutivos de uma progressão geométrica  $(a_n)$  de razão positiva

Determina o valor de  $a$ , e calcula o produto dos termos,  $a_5$ ,  $a_6$  e  $a_7$ , da progressão geométrica  $(a_n)$ , sabendo que  $a_1 = \frac{e^{-14}}{32768}$

12. Seja  $f$ , a função real de variável real, definida por,  $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(-2x+2) - \ln(-x) - 1}{x} & \text{se } x < 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \\ \frac{x^3 e^{-2x} + ax}{2x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$ ,

com  $a \in \mathbb{R}$

**12.1.** Determina os zeros da função  $f$  no intervalo  $] -\infty; 0[$

**12.2.** Determina o valor de  $a$ , de modo que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$

## COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 4 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final

| Itens            | 9. | 11. | 12.1 | 12.2 | Subtotal |
|------------------|----|-----|------|------|----------|
| Cotação (Pontos) | 16 | 20  | 20   | 16   | 72       |

Destes 14 itens da prova, contribuem para a classificação final da prova os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação

| Itens            | 1.1           | 1.2 | 2.1 | 2.2 | 3.1 | 3.2 | 4.1 | 4.2 | 5 | 6 | 7 | 8 | 10.1 | 10.2 | Subtotal |
|------------------|---------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|---|---|---|---|------|------|----------|
| Cotação (Pontos) | 8 × 16 Pontos |     |     |     |     |     |     |     |   |   |   |   |      |      | 128      |

**PÁGINA EM BRANCO**