



---

Duração do Exame: 150 minutos + 30 minutos de tolerância | junho de 2020

---

12.º Ano de Escolaridade

---

1. .

1.1. Passemos  $z$  para a forma trigonométrica

$$|z| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{4} = 2$$

Seja  $\theta$  o argumento de  $z$

Então,

$$\tan(\theta) = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1, \text{ e } \theta \text{ pertence ao quarto quadrante}$$

$$\text{Logo, } \theta = -\frac{\pi}{4}$$

$$\text{Assim, } z = 2e^{i(-\frac{\pi}{4})}$$

Ora,

$$z^{8n+1} = \left(2e^{i(-\frac{\pi}{4})}\right)^{8n+1} = 2^{8n+1}e^{i(-\frac{(8n+1)\pi}{4})} = 2^{8n+1}e^{i(-\frac{\pi}{4}-2n\pi)}$$

Verificamos que o argumento de  $z^{8n+1}$  é  $-\frac{\pi}{4} - 2n\pi$ , com  $n \in \mathbb{N}$

Logo, o afixo do número complexo  $z^{8n+1}$  pertence à semirreta com origem em  $O$ , e que faz um ângulo de amplitude  $-\frac{\pi}{4}$  com o semieixo positivo real

Seja  $w = x + yi$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$

O conjunto  $A = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(w) = \operatorname{Im}(\bar{w})\} = \{w \in \mathbb{C} : x = -y\} = \{w \in \mathbb{C} : y = -x\}$ , representa a bissetriz dos quadrantes pares

Logo, o afixo do número complexo  $z^{8n+1}$  pertence ao conjunto  $A = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(w) = \operatorname{Im}(\bar{w})\}$ , para todo o número natural  $n$

1.2.  $z$  é solução da equação  $w^2 + aw + \sqrt{2}b = 0$ , se e só se,  $z^2 + az + \sqrt{2}b = 0$

Ou seja,

$$(\sqrt{2} - \sqrt{2}i)^2 + a(\sqrt{2} - \sqrt{2}i) + \sqrt{2}b = 0 \Leftrightarrow 2 - 4i + 2i^2 + \sqrt{2}a - \sqrt{2}ai + \sqrt{2}b = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 - 4i - 2 + \sqrt{2}a - \sqrt{2}ai + \sqrt{2}b = 0 \Leftrightarrow -4i + \sqrt{2}a - \sqrt{2}ai + \sqrt{2}b = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}a + \sqrt{2}b + (-\sqrt{2}a - 4)i = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}a + \sqrt{2}b = 0 \wedge -\sqrt{2}a - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b = -a \wedge a = -2\sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b = 2\sqrt{2} \wedge a = -2\sqrt{2}$$

**Resposta:(A)**

2. .

- 2.1. O número de maneiras distintas de colocar no tabuleiro os quatro cartões vermelhos é dado por  ${}^{16}A_4$ . Colocados os cartões vermelhos, sobram doze casas para colocar, de forma ordenada, os cinco cartões azuis. O número de maneiras distintas de colocar no tabuleiro os cinco cartões azuis é dado por  ${}^{12}A_5$ .

Então, os nove cartões podem ser colocados no tabuleiro de  ${}^{16}A_4 \times {}^{12}A_5 = 4151347200$  maneiras distintas.

### Segundo processo

O número de maneiras distintas de colocar no tabuleiro os cinco cartões azuis é dado por  ${}^{16}A_5$ . Colocados os cartões azuis, sobram onze casas para colocar, de forma ordenada, os quatro cartões vermelhos. O número de maneiras distintas de colocar no tabuleiro os quatro cartões vermelhos é dado por  ${}^{11}A_4$ .

Então, os nove cartões podem ser colocados no tabuleiro de  ${}^{16}A_5 \times {}^{11}A_4 = 4151347200$  maneiras distintas.

### Terceiro processo

Olhando para a constituição dos nove cartões, verificamos que são todos distintos (pois, apesar de haver cartões de duas cores, eles estão numerados). Então só temos de colocar os nove cartões em nove das dezesseis casas do tabuleiro. Assim, o número de maneiras distintas de colocar no tabuleiro os nove cartões é dado por  ${}^{16}A_9 = 4151347200$ .

### Resposta: (A)

- 2.2. O número de casos possíveis é  ${}^{16}A_4 \times {}^{12}A_5$ .

Quanto ao número de casos favoráveis

Em primeiro lugar é necessário colocar, de forma ordenada, os quatro cartões vermelhos nos quatro cantos do tabuleiro. Essa colocação pode ser feita de  $4!$  maneiras distintas. Colocados os cartões vermelhos nos quatro cantos do tabuleiro, existem  ${}^{12}A_5$  maneiras distintas de colocar os cinco cartões azuis nas restantes doze casas do tabuleiro.

Assim, há  $4! \times {}^{12}A_5$  maneiras distintas de colocar os cartões no tabuleiro, de modo que os quatro cantos sejam preenchidos com cartões vermelhos.

Portanto, a probabilidade pedida é  $P = \frac{4! \times {}^{12}A_5}{{}^{16}A_4 \times {}^{12}A_5} = \frac{1}{1820}$ .

3. .

- 3.1. A função  $f$ , tem domínio  $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$

Calculemos,  $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x)$

Ora,

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \left( \frac{4x \cos(x) - 2 \sin(x)}{\cos(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} (4x - 2 \tan(x)) = -2\pi - (-\infty) = +\infty$$

Logo, a reta de equação  $x = -\frac{\pi}{2}$ , é assíntota vertical ao gráfico de  $f$ .

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \left( \frac{4x \cos(x) - 2 \sin(x)}{\cos(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (4x - 2 \tan(x)) = 2\pi - (+\infty) = -\infty$$

Logo, a reta de equação  $x = \frac{\pi}{2}$ , é assíntota vertical ao gráfico de  $f$ .

Como a função  $f$  é contínua em todo o seu domínio, então não existem mais assíntotas verticais ao gráfico da função  $f$ .

**3.2.** Determinemos a função derivada de  $f$

$$f'(x) = \left( \frac{4x \cos(x) - 2 \sin(x)}{\cos(x)} \right)' = (4x - 2 \tan(x))' = 4 - \frac{2}{\cos^2(x)}$$

Procuramos os zeros de  $f'(x)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4 - \frac{2}{\cos^2(x)} = 0 \Leftrightarrow \frac{4 \cos^2(x) - 2}{\cos^2(x)} = 0 \Leftrightarrow 4 \cos^2(x) - 2 = 0 \wedge \cos^2(x) \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^2(x) = \frac{1}{2} \wedge \cos(x) \neq 0 \Leftrightarrow \cos(x) = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \wedge x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(x) = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \wedge x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left( \cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \vee \cos(x) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right) \wedge x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left( x = \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi \vee x = \pm \frac{3\pi}{4} + k2\pi \right) \wedge x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

Como  $x \in ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ , resulta que,  $x = -\frac{\pi}{4} \vee x = \frac{\pi}{4}$

Quadro de sinal de  $f'(x)$

$x$	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	\\ \ \ \ \ \	-	0	+	0	-	\\ \ \ \ \ \
$f(x)$	\\ \ \ \ \ \	\ \ \ \ \	$-\pi + 2$	\ \ \ \ \	$\pi - 2$	\ \ \ \ \	\\ \ \ \ \ \

$$f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 4 \times \left(-\frac{\pi}{4}\right) - 2 \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\pi + 2$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4 \times \left(\frac{\pi}{4}\right) - 2 \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \pi - 2$$

A função  $f$  é estritamente decrescente em  $]-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{4}[$  e em  $[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}[$ , e é estritamente crescente em  $[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}]$

A função atinge o valor mínimo relativo  $-\pi + 2$ , para  $x = -\frac{\pi}{4}$ , e atinge o valor máximo relativo  $\pi - 2$ , para  $x = \frac{\pi}{4}$

4. .

$$\begin{aligned} 4.1. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x + \ln(-x + 1)}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(-x + 1)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (-1) + \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(y)}{1 - y} = -1 + \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(y)}{y} \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{1 - y} = -1 + 0 \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{y \left(\frac{1}{y} - 1\right)} = \\ &= -1 + 0 \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{y} - 1} = 1 - 0 \times (-1) = -1 \end{aligned}$$

**Nota:** fez-se uma mudança de variável:

$$y = -x + 1 \Leftrightarrow x = 1 - y$$

se  $x \rightarrow -\infty$ , então,  $y \rightarrow +\infty$

Logo, a reta de equação  $y = -1$ , é assíntota horizontal ao gráfico da função  $g$ , quando  $x \rightarrow -\infty$

**Nota:** Utilizou-se o limite notável  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

4.2. .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x + \ln(-x + 1)}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(-x + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) + \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y}{1 - e^y} = \\ &= -1 - \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{e^y - 1}{y}} = -1 - \frac{1}{1} = -2 \end{aligned}$$

**Nota:** fez-se uma mudança de variável:

$$y = \ln(-x + 1) \Leftrightarrow x = 1 - e^y$$

se  $x \rightarrow 0^-$ , então,  $y \rightarrow 0^+$

Logo,  $b = -2$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{xe^x - x + x^2}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(e^x - 1)}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} + \lim_{x \rightarrow 0^+} (1) = 1 + 1 = 2$$

Logo,  $a = 2$

Ou seja,  $b = -a$

**Nota:** Utilizou-se o limite notável  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

5. .

Determinemos  $\overline{TV}$

No triângulo retângulo  $VTU$ , tem-se,

$$\cos(x) = \frac{\overline{TU}}{\overline{TV}} \Leftrightarrow \cos(x) = \frac{\frac{l}{2}}{\overline{TV}} \Leftrightarrow \cos(x) = \frac{l}{2\overline{TV}} \Leftrightarrow 2\overline{TV} = \frac{l}{\cos(x)} \Leftrightarrow \overline{TV} = \frac{l}{2\cos(x)}$$

Assim,

$$A_{\text{superfície da pirâmide}} = A_{[ABCD]} + 4 \times A_{[BCV]} = \overline{BC}^2 + \frac{\overline{BC} \times \overline{TV}}{2} = l^2 + 4 \times \frac{l \times \frac{l}{2\cos(x)}}{2} = l^2 + \frac{l^2}{\cos(x)}$$

**Resposta:(C)**

6. Consideremos os acontecimentos

$A$  : O aluno é rapaz

$B$  : O aluno está inscrito no clube de leitura da Biblioteca

Pretende-se determinar  $P(A|B)$

Dos dados,

- $\frac{2}{5}$  dos alunos são raparigas
- $\frac{4}{5}$  dos alunos estão inscritos no clube de leitura da Biblioteca
- $\frac{1}{5}$  das raparigas não estão inscritos no clube de leitura da Biblioteca

Tem-se,

$$P(A) = \frac{3}{5}$$

$$P(\bar{A}) = \frac{2}{5}$$

$$P(B) = \frac{4}{5}$$

$$P(\bar{B}) = \frac{1}{5}$$

$$P(\bar{B}|\bar{A}) = \frac{1}{5}$$

Ora,

$$P(\bar{B}|\bar{A}) = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{P(\bar{B} \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{P(\bar{B} \cap \bar{A})}{\frac{2}{5}} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow P(\bar{B} \cap \bar{A}) = \frac{1}{5} \times \frac{2}{5} \Leftrightarrow P(\bar{B} \cap \bar{A}) = \frac{2}{25}$$

### Elaborando uma tabela

	A	$\bar{A}$	
B	$\frac{12}{25}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{4}{5}$
$\bar{B}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{5}$
	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

Assim,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{12}{25}}{\frac{4}{5}} = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$$

7. Dos dados do problema, tem-se,

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} h(b) = h(a) + \ln(2) \\ m_{AB} = \frac{\ln(\sqrt{2})}{e} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} h(b) = h(a) + \ln(2) \\ \frac{h(b) - h(a)}{b - a} = \frac{\ln(\sqrt{2})}{e} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \ln(b - e) = \ln(a - e) + \ln(2) \\ \frac{\ln(2)}{b - a} = \frac{\frac{1}{2} \ln(2)}{e} \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \ln(b - e) = \ln(2a - 2e) \\ \frac{\ln(2)}{b - a} = \frac{\ln(2)}{2e} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} b - e = 2a - 2e \\ b - a = 2e \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} b = 2a - e \\ b - a = 2e \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} b = 2a - e \\ 2a - e - a = 2e \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} b = 2a - e \\ a = 3e \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} b = 5e \\ a = 3e \end{array} \right. \end{aligned}$$

Ponto A

$$h(3e) = \ln(3e - e) = \ln(2e) = \ln(2) + \ln(e) = \ln(2) + 1$$

Logo,  $A(3e; \ln(2) + 1)$

O declive da reta tangente ao gráfico de  $h$  no ponto A, é  $h'(3e)$

$$h'(x) = \frac{(x-e)'}{x-e} = \frac{1}{x-e}$$

Assim,

$$h'(3e) = \frac{1}{3e-e} = \frac{1}{2e}$$

Logo,

$$y = \frac{1}{2e}x + b, b \in \mathbb{R}$$

Ora,

$$\ln(2) + 1 = \frac{1}{2e} \times 3e + b \Leftrightarrow \ln(2) + 1 = \frac{3}{2} + b \Leftrightarrow b = \ln(2) + 1 - \frac{3}{2} \Leftrightarrow b = \ln(2) - \frac{1}{2}$$

Concluindo,

a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de  $h$  no ponto  $A$  é  $y = \frac{1}{2e}x + \ln(2) - \frac{1}{2}$

8. Sabemos que a assíntota ao gráfico de  $f$  intersecta o eixo  $Ox$  no ponto de abscissa  $\frac{1}{2}$ , e intersecta o eixo  $Oy$ , no ponto de ordenada  $-1$

$$\text{Assim, o declive da reta é } m = \frac{-1-0}{0-\frac{1}{2}} = \frac{-1}{-\frac{1}{2}} = 2$$

$$\text{Deste modo, sabemos que } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$$

Ora,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^3(x) + e^{3x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^3(x) + e^{3x}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^3(x)}{x^3} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x}}{x^3} = \\ &= \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \right)^3 + \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \right)^3 = 2^3 + \infty = +\infty \end{aligned}$$

**Resposta: (D)**

$$\text{Nota: Utilizou-se o limite notável } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

9. Se  $\lim f(x_n) = a$ , então, a sucessão  $(x_n)$  terá de ser tal que:

- $x_n < e + 1$
- $\lim(x_n) = e + 1$

Observando as opções, tem-se que,

$$(A) \ x_n = e - \frac{1}{\sqrt{\ln(n+1)+1}} < e \text{ e } \lim(x_n) = e - \frac{1}{+\infty} = e - 0 = e$$

$$(B) \ x_n = 1 - \frac{2}{\sqrt{e^n+1}} < 1 \text{ e } \lim(x_n) = 1 - \frac{2}{+\infty} = 1 - 0 = 1$$

$$\begin{aligned} (C) \ x_n &= e + \ln(e) - \frac{\sqrt{n}}{n} = e + 1 - \frac{\sqrt{n}}{n} < e + 1 \text{ e } \lim(x_n) = e + 1 - \lim \frac{\sqrt{n}}{n} = e + 1 - \lim \sqrt{\frac{n}{n^2}} = \\ &= e + 1 - \sqrt{\lim \frac{1}{n}} = e + 1 - 0 = e + 1 \end{aligned}$$

$$(D) x_n = e + 1 + \frac{n}{e^n} > e + 1 \text{ e } \lim(x_n) = e + 1 + \lim \frac{n}{e^n} = e + 1 + \frac{1}{\lim \frac{e^n}{n}} = e + 1 + \frac{1}{+\infty} = e + 1 + 0 = e + 1$$

**Resposta: (C)**

**Nota:** Utilizou-se os limite notável  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

10. .

**10.1.** Determinemos as coordenadas do ponto  $A$

Sabe-se que  $A(x; 0; 0)$ , com  $x \in \mathbb{R}$

Ora,  $A$  é ponto da reta  $AG$

Assim,

$$(x; 0; 0) = (3; -6; -9) + k(0; 2; 3) \Leftrightarrow x = 3 \wedge 0 = -6 + 2k \wedge 0 = -9 + 3k \Leftrightarrow x = 3 \wedge k = 3 \wedge k = 3 \Leftrightarrow x = 3$$

Logo,  $A(3; 0; 0)$

assim,  $D(0; 3; 0)$

$$\text{Ora, } \overline{AD} = \sqrt{(3-0)^2 + (0-3)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

Determinemos as coordenadas do ponto  $V$

Sabe-se que  $V(3; 3; z)$ , com  $z \in \mathbb{R}$

Ora,  $V$  é ponto da reta  $AG$

Assim,

$$(3; 3; z) = (3; -6; -9) + k(0; 2; 3) \Leftrightarrow 3 = 3 \wedge 3 = -6 + 2k \wedge z = -9 + 3k \Leftrightarrow 3 = 3 \wedge k = \frac{9}{2} \wedge z = -9 + 3k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 = 3 \wedge k = \frac{9}{2} \wedge z = -9 + \frac{27}{2} \Leftrightarrow 3 = 3 \wedge k = \frac{9}{2} \wedge z = \frac{9}{2}$$

Logo,  $V\left(3; 3; \frac{9}{2}\right)$

Assim, a medida da altura da pirâmide  $[ABCDV]$  é  $\frac{9}{2}$

Portanto, o volume do sólido é igual a

$$V_{\text{sólido}} = 2 \times V_{\text{pirâmide}[ABCDV]} = 2 \times \frac{1}{3} \times \overline{AD}^2 \times \frac{9}{2} = 3 \times (3\sqrt{2})^2 = 3 \times 18 = 54 \text{ u.v.}$$

**10.2.** O plano  $\alpha$  é perpendicular ao plano  $ABV$

Assim, um vetor normal ao plano  $\alpha$  terá de ser perpendicular a um vetor normal ao plano  $ABV$

Seja  $\vec{\alpha}$ , um vetor normal ao plano  $\alpha$

Como  $\vec{\beta} = (-3; 3; -2)$  é um vetor normal ao plano  $ABV$ , então,

$\vec{\alpha}$  pode ser  $(2; 0; -3)$

**Nota 1:** A escolha do vetor  $\vec{\alpha}$  foi feita de modo que  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$

Há infinitos vetores

**O procedimento foi:** Substituir a ordenada do vetor  $\vec{\beta}$  por zero, trocar as outras duas coordenadas

e mudar o sinal de uma delas

Assim, uma equação cartesiana de um plano perpendicular ao plano  $ABV$  é da forma

$2x + 0y - 3z + d = 0$ , com  $d \in \mathbb{R}$ , ou seja,  $2x - 3z + d = 0$ , com  $d \in \mathbb{R}$

Como  $V$  pertence a este plano, vem,  $2 \times 3 - 3 \times \frac{9}{2} + d = 0 \Leftrightarrow 6 - \frac{27}{2} + d = 0 \Leftrightarrow -\frac{15}{2} + d = 0 \Leftrightarrow d = \frac{15}{2}$

Logo,  $2x - 3z + \frac{15}{2} = 0$  é uma equação cartesiana de um plano  $\alpha$  perpendicular ao plano  $ABV$

Ou seja,  $4x - 6z + 15 = 0$

**Obs.:** Há um **número infinito** de planos perpendiculares ao plano  $ABV$  e que contêm o ponto  $V$

O plano  $\alpha$  pedido é um deles

11. Como,  $\frac{2}{e^{-2}}$ ,  $\frac{a}{16}$  e  $512e^{10}$ , com  $a \in \mathbb{R}$ , são três termos consecutivos de uma progressão geométrica  $(a_n)$  de razão positiva,

Então, vem,

$$\begin{aligned} \frac{\frac{a}{16}}{\frac{2}{e^{-2}}} &= \frac{512e^{10}}{\frac{a}{16}} \Leftrightarrow \left(\frac{a}{16}\right)^2 = 1024e^{12} \Leftrightarrow a^2 = 16^2 \times 1024e^{12} \Leftrightarrow a^2 = 262144e^{12} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a = \pm\sqrt{262144e^{12}} \Leftrightarrow a = \pm 512e^6 \end{aligned}$$

Como a razão da progressão geométrica é positiva, então  $a > 0$ , logo  $a = 512e^6$

Assim,

$$\frac{a}{16} = \frac{512e^6}{16} = 32e^6$$

Seja  $r$ , a razão da progressão geométrica

$$r = \frac{512e^{10}}{32e^6} = 16e^4$$

Assim,

$$a_5 = a_1 \times r^4 = \frac{e^{-14}}{32768} \times (16e^4)^4 = \frac{e^{-14}}{32768} \times 16^4 e^{16} = \frac{e^{-14}}{32768} \times 65536e^{16} = 2e^2$$

$$a_6 = a_5 \times r = 2e^2 \times 16e^4 = 32e^6$$

$$a_7 = a_6 \times r = 32e^6 \times 16e^4 = 512e^{10}$$

Portanto,

$$a_5 \times a_6 \times a_7 = 2e^2 \times 32e^6 \times 512e^{10} = 32768e^{18}$$



$$\begin{aligned}
\mathbf{12.1.} \quad f(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{\ln(-2x+2) - \ln(-x) - 1}{x} = 0 \Leftrightarrow \ln(-2x+2) - \ln(-x) - 1 = 0 \wedge x < 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \ln(-2x+2) = \ln(-x) + 1 \wedge x < 0 \Leftrightarrow \ln(-2x+2) = \ln(-x) + \ln(e) \wedge x < 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \ln(-2x+2) = \ln(-ex) \wedge x < 0 \Leftrightarrow -2x+2 = -ex \wedge x < 0 \Leftrightarrow -2x+ex = -2 \wedge x < 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (e-2)x = -2 \wedge x < 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2}{e-2} \wedge x < 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{2-e} \wedge x < 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{2-e}
\end{aligned}$$

Resposta:  $\frac{2}{2-e}$  é o zero da função  $f$  em  $]-\infty; 0[$

$$\begin{aligned}
\mathbf{12.2.} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 e^{-2x} + ax}{2x} \stackrel{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 e^{-2x}}{2x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^{2x}} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{2} = \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x^2}} + \frac{a}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}\right)^2} + \frac{a}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{+\infty} + \frac{a}{2} = \frac{1}{2} \times 0 + \frac{a}{2} = \frac{a}{2}
\end{aligned}$$

**Outro processo**

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 e^{-2x} + ax}{2x} \stackrel{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(x^2 e^{-2x} + a)}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 e^{-2x}}{2} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{2} = \\
&= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^{2x}} + \frac{a}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x^2}} + \frac{a}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}\right)^2} + \frac{a}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{+\infty} + \frac{a}{2} = \frac{1}{2} \times 0 + \frac{a}{2} = \frac{a}{2}
\end{aligned}$$

Assim,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1 \Leftrightarrow \frac{a}{2} = -1 \Leftrightarrow a = -2$$

Resposta:  $a = -2$