facebook.com/recursos.para.matematica
facebook.com/sinalmaismat
facebook.com/oexpoentemaximo

Prova Modelo de Exame Final Nacional

Prova 13 | Ensino Secundário | 2020

12º Ano de Escolaridade

José Carlos Pereira, Nuno Miguel Guerreiro, Valter Carlos

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos

Os items **2.1**, **2.2**, **5** e **6** são **obrigatórios**, estando representados na margem da prova como **Ob.** Dos restantes 14 items da prova, apenas os 8 melhores contarão para a nota final.

É permitido o uso da calculadora.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso do corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o caderno e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se na margem de cada página.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Todos os itens desta prova são originais do autor – referência ao autor no margem da prova. Prova realizada em junho de 2020 . Última atualização às 17:24 de 2 de Julho de 2020.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \ \cos b + \operatorname{sen} b \ \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \ \cos b - \operatorname{sen} a \ \operatorname{sen} b$

Complexos

$(\rho\, e^{i\theta})^n = \rho^n\, e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho\, e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}} \quad (k \in \{0, \ldots, n-1\} \text{ e } n \in \mathbb{N})$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u\, v)' = u'\, v + u\, v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\, v - u\, v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\, u^{n-1}\, u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\, e^u$

$(a^u)' = u'\, a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

Cotações

1. Considere o desenvolvimento de $\left(ax^2 + \frac{1}{ax}\right)^n$ $a \in \mathbb{R}^+$, $x \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}$.

Sabe-se que:

- ${}^nC_4 + {}^nC_{n-5} + {}^{n+1}C_6$ é o elemento central de uma certa linha do Triângulo de Pascal;
- o coeficiente do termo de grau 2 é $\frac{70}{3}$.

Qual é o valor de a?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4

2. Considere num referencial o.n $Oxyz$ o paralelepípedo $[ABCDEFGH]$ representado na Figura 1.

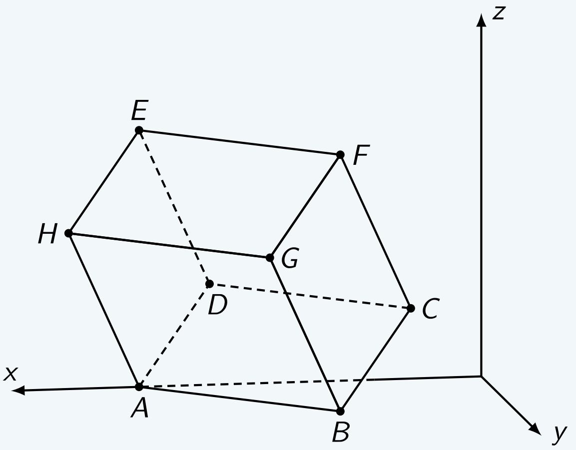

Figura 1

Sabe-se que:

- O ponto A pertence ao eixo Ox;
- O ponto G tem coordenadas $(3,3,2)$;
- O ponto C tem coordenadas $(1,1,1)$;
- A reta AB é definida pela equação $(x,y,z) = (-2,6,0) + k(-1,1,0)$, $k \in \mathbb{R}$;
- O plano β é definido pela equação $3x + 4y + z = 15$.

2.1. Seja P o ponto de interseção da reta AB com o plano β. **Ob. (16)**

Determine a amplitude do ângulo AOP, em graus, com arredondamento às unidades.

2.2. Determine uma equação cartesiana do plano EFG. **Ob. (20)**

3. Considere todos os números de sete algarismos e seja A o conjunto de todos os números de sete algarismos que satisfazem as seguintes condições:

- nenhum dos algarimos é igual a 0;
- não têm algarismos repetidos;
- tem um 2, um 3 e um 4, dispostos por ordem crescente ou decrescente, não necessariamente de forma consecutiva.

Escolhendo um número de sete algarismos ao acaso, qual é a probabilidade de pertencer a A?

(A) $\frac{7}{2500}$ **(B)** $\frac{63}{25000}$ **(C)** $\frac{7}{5000}$ **(D)** $\frac{63}{50000}$

4. Um Professor de Matemática tem uma estante repleta de livros de Matemática A (manuais e livros de exercícios) do 10.º, 11.º e 12.º anos.

Sabe-se que:

- os livros do 12.º ano são o triplo dos restantes;
- dos livros do 12.º ano, dois em cada cinco são manuais;
- dos livros de exercícios, 30% não são do 12.º ano.

4.1. Retirando ao acaso um livro da estante, qual é a probabilidade desse livro ser um manual?

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

4.2. O Professor de Matemática tem 140 livros na sua estante, e decidiu doar dez desses livros a uma instituição de caridade.

Após analisar as condições para a doação, verificou que pelo menos 9 dos livros doados deverão ser do 12.º ano, e que exatamente 5 dos livros doados deverão ser manuais do 12.º ano.

Nessas condições, apresente uma fórmula que permita calcular o número de formas distintas de fazer a escolha dos livros.

Ob. (20)

5. Considera a função f definida em $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ por $f(x) = 5 - x^2 e^{0,01x} + \ln x$.

Sabe-se que:

- O é a origem de um referencial o.n xOy e P é o ponto do gráfico de f de abcissa a;
- a reta s é a reta tangente ao gráfico de f no ponto P
- a reta r é perpendicular à reta s e contém o ponto P
- Q é o ponto de interseção da reta r com o eixo Ox, tal que $[OQ]$ é um lado de um quadrado cuja medida da área é 2 u.a.

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, determine o(s) valor(es) de a.

Na sua resposta deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizada(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação;
- apresentar o(s) valor(es) de a, com arredondamento às centésimas.

Ob. (16)

6. De uma sucessão (v_n) de termos positivos sabe-se que:

- $v_{n+1} - \frac{2}{3}v_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$;
- $v_2 \times v_3 = \frac{9}{2}$

Averigue se $\frac{8\sqrt{3}}{27}$ é termo da sucessão (v_n).

7. Na Figura 2, estão representado, no plano complexo, os polígonos regulares $[ABCD]$ e $[AEFGH]$, ambos centrados na origem.

Sabe-se que A é o afixo do número complexo $w = -2\sqrt{3} + 2i$.

Qual das seguintes afirmações é falsa?

(A) a área do polígono $[ABCD]$ é 32 u.a.

(B) G é o afixo do número complexo $4e^{i\left(\frac{\pi}{30}\right)}$

(C) w é solução da equação $z^5 - z^4 = 0$

(D) o perímetro do polígono $[AEFGH]$ é, aproximadamente, 23,5 u.c.

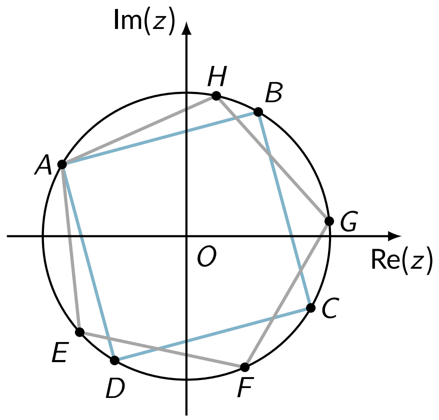

Figura 2

8. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $w_1 = 1 + \sqrt{3}i$ e $w_2 = i^{17} + \sqrt{3}$.

Seja $w = \frac{(w_1)^2}{1+i} - w_2$

No plano complexo, a condição abaixo define um quadrilátero.

$$0 \leq \operatorname{Arg}(z + 2 + 2i) \leq \operatorname{Arg}(w) \wedge \operatorname{Re}(z + i) \leq 2 \wedge \operatorname{Im}(\bar{z} + i) \geq 0$$

Represente o quadrilátero no plano complexo e determine a sua área.

9. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2 + x + 4}}{x + 1} & \text{se } x < -1 \\ 8^x - 13 \times 4^x & \text{se } x \geq -1 \end{cases}$

9.1. Considere a sucessão (u_n) definida por $u_n = \frac{n^2 - n}{n - 1}$.

Qual é o valor de $\lim g(-u_n)$?

(A) $-\infty$ **(B)** -1 **(C)** 1 **(D)** $+\infty$

9.2. Para $x \geq -1$, determine o conjunto-solução da inequação $g(x) + 9 \times 2^{x+2} \geq 0$.

10. Na Figura 3 estão representadas, num referencial o.n xOy, uma circunferência centrada em C e as retas r e s.

Sabe-se que:

- uma equação da circunferência é $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$;
- a reta r é tangente à circunferência no ponto $B\,(3,1)$;
- a inclinação da reta s é $\frac{\pi}{4}$;
- o ponto A pertence ao eixo Oy, à reta s e à circunferência.

Quais são as coordenadas do ponto T, ponto de interseção entre as retas r e s?

(A) $(7,10)$ **(B)** $(9,12)$ **(C)** $(7,11)$ **(D)** $(9,13)$

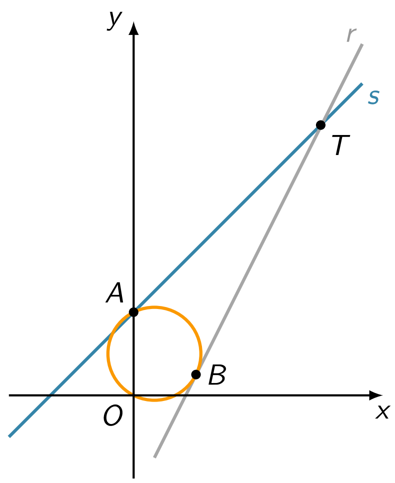

Figura 3

11. Quantas soluções tem a equação $x\,\text{tg}\,x = 1$ em $]-20\pi, 20\pi[$?

(A) Nenhuma **(B)** 20 **(C)** 40 **(D)** 80

12. Na Figura 4, está representado o gráfico de uma função f, de domínio $[-4, 4]$.

Tal como a figura sugere todos os objetos inteiros têm imagens inteiras.

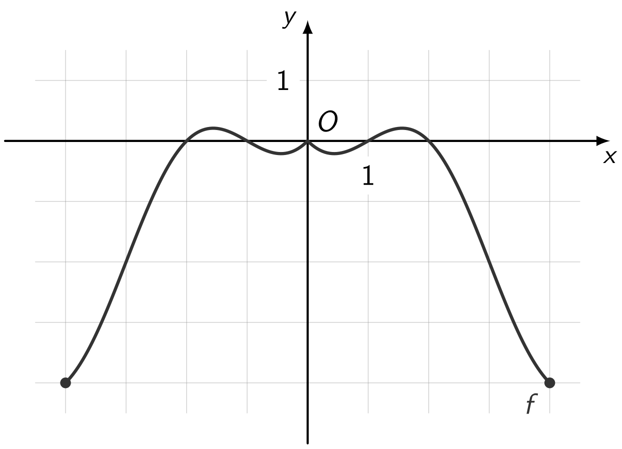

Figura 4

Seja h a função, de domínio $[-4,4]$, definida por $h(x) = \ln(g(x))$.

Qual pode ser a expressão analítica da função g ?

(A) $g(x) = f(x) + 4$ **(B)** $g(x) = -f(x) + 1$ **(C)** $g(x) = |f(x)|$ **(D)** $g(x) = f(x+5)$

13. Seja f uma função, de domínio $[-2\pi, +\infty[$, definida por $f(x) = \begin{cases} \text{sen}^3 x - \cos x & \text{se } -2\pi \leq x \leq 0 \\ \dfrac{x^2 \ln x}{e^{2x} - 1} & \text{se } x > 0 \end{cases}$

13.1. Mostre que a função f não é contínua no seu domínio.

13.2. Considere as seguintes afirmações:

I) Como $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) < -\frac{1}{2} < f(e)$, pelo Teorema de Bolzano, vem que $\exists c \in \left]-\frac{\pi}{2}, e\right[\; : f(c) = -\frac{1}{2}$

II) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) + 1}{x^3}$ é finito

III) A reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal do gráfico de f.

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) **I)** e **III)** são ambas verdadeiras.

(B) **II)** e **III)** são ambas verdadeiras.

(C) Apenas **III)** é verdadeira.

(D) **I)**, **II)** e **III)** são falsas.

13.3. Considere a função g, de domínio $\left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right]$, tal que a sua derivada, também de domínio $\left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right]$, é definida por

$$g'(x) = f(x) + \frac{1}{4} \cos x$$

Estude a função g quanto ao sentido das concavidades e à existência de pontos de inflexão do seu gráfico.

Na sua resposta deve apresentar:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de g tem concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de g tem concavidade voltada para cima;
- a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de g.

FIM