



1. Como ${}^n C_{n-5} = {}^n C_5$ e ${}^n C_4 + {}^n C_5 = {}^{n+1} C_5$, vem que ${}^n C_4 + {}^n C_{n-5} + {}^{n+1} C_6 = {}^{n+1} C_5 + {}^{n+1} C_6 = {}^{n+2} C_6$. Uma vez que ${}^{n+2} C_6$ é o termo central de uma linha do Triângulo de Pascal, tem-se que $n + 2 = 12 \Leftrightarrow n = 10$.

O desenvolvimento $\left(ax^2 + \frac{1}{ax}\right)^{10}$ é tal que cada um dos seus termos é dado por:

$${}^{10} C_k (ax^2)^{10-k} \left(\frac{1}{ax}\right)^k = {}^{10} C_k a^{10-k} (x^2)^{10-k} a^{-k} x^{-k} = \left({}^{10} C_k a^{10-2k}\right) x^{2(10-k)-k} = \left({}^{10} C_k a^{10-2k}\right) x^{20-3k}$$

O termo de grau 2 obtém-se para $20 - 3k = 2 \Leftrightarrow k = 6$, e o coeficiente desse termo é dado por ${}^{10} C_6 a^{10-2 \times 6} = \frac{{}^{10} C_6}{a^2}$. Uma vez que, pelo enunciado, sabe-se que o termo de grau 2 tem coeficiente $\frac{70}{3}$, vem:

$$\frac{{}^{10} C_6}{a^2} = \frac{70}{3} \Leftrightarrow a = \pm \sqrt{\frac{3 \times {}^{10} C_6}{70}} \stackrel{a \in \mathbb{R}^+}{\Leftrightarrow} a = 3$$

Resposta: (C)

2.

- 2.1. O ponto A é o ponto da reta AB que pertence ao eixo Ox , pelo que as suas coordenadas são da forma $(x_A, 0, 0)$. As coordenadas genéricas de um ponto da reta AB podem ser escritas como $(x, y, z) = (-2 - k, 6 + k, 0)$, $k \in \mathbb{R}$. Ao ponto A corresponde o valor de k tal que $6 + k = 0 \wedge 0 = 0 \Leftrightarrow k = -6$, vindo que a abcissa do ponto A é $-2 - (-6) = 4$. Conclui-se que o ponto A é o ponto de coordenadas $(4, 0, 0)$.

Como o ponto P é o ponto de interseção da reta AB com o plano β , as suas coordenadas respeitam as coordenadas genéricas da reta AB e a equação geral do plano β , logo obtém-se:

$$3(-2 - k) + 4(6 + k) + 0 = 15 \Leftrightarrow -6 - 3k + 24 + 4k = 15 \Leftrightarrow k = -3 \Leftrightarrow k = -1$$

concluindo-se que o ponto P é o ponto de coordenadas $(-2 - (-3), 6 - 3, 0) = (1, 3, 0)$.

Designando por θ a amplitude do ângulo AOP , pode-se escrever $\cos \theta = \frac{\vec{OA} \cdot \vec{OP}}{\|\vec{OA}\| \times \|\vec{OP}\|}$, tal que:

- $\vec{OA} = A - O = A = (4, 0, 0)$, vindo que $\|\vec{OA}\| = 4$
- $\vec{OP} = P - O = P = (1, 3, 0)$, vindo que $\|\vec{OP}\| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{10}$
- $\vec{OA} \cdot \vec{OP} = (4, 0, 0) \cdot (1, 3, 0) = 4$

$\therefore \cos \theta = \frac{4}{4\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$, pelo que a amplitude do ângulo AOP , com arredondamento às unidades é, $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) \approx 72^\circ$.

- 2.2. O plano EFG é paralelo ao plano ABC e contém o ponto H , pelo que comecemos por determinar um vetor normal ao plano ABC .

A reta AB está contida no plano ABC , assim como, a título de exemplo, a reta AC . Sabe-se que a reta AB tem a direção do vetor $(-1, 1, 0)$ e a reta AC tem a direção do vetor $\vec{AC} = C - A = (1, 1, 1) - (4, 0, 0) = (-3, 1, 1)$. Designando por \vec{n} um vetor normal ao plano ABC , tal que $\vec{n} = (a, b, c)$, pode-se escrever:

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (-1, 1, 0) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (-3, 1, 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + b = 0 \\ -3a + b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ c = 2b \end{cases}$$

pelo que um vetor normal ao plano ABC é o vetor $\vec{n}(b, b, 2b)$, $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Por exemplo, para $b = 1$, obtém-se $\vec{n}(1, 1, 2)$.

Note que como EFG é paralelo ao plano ABC , a direção do vetor normal ao plano EFG é a mesma da de \vec{n} . Desta forma, uma equação geral do plano EFG é da forma $x + y + 2z + d = 0$. Uma vez que G está contido em EFG , tem-se $3 + 3 + 2 \times 2 + d = 0 \Leftrightarrow d = -10$, de onde se conclui que o plano EFG é definido pela equação $x + y + 2z = 10$.

3. Note-se que o número de casos possíveis corresponde ao total de números de sete algarismos que se podem formar. Logo, o número de casos possíveis é 9×10^6 (o algarismo 0 não pode ser o primeiro algarismo).

Como os números que são elementos de A contém um 2, um 3 e um 4, comecemos por dispor esses três números nas sete possíveis posições: 7C_3 . Como os números terão de estar dispostos por ordem crescente ou decrescente, existem $2 \times {}^7C_3$ formas de dispor esses três números nas condições do enunciado. Uma vez que nenhum dos algarismos dos números pertencentes a A é igual a 0, e não existem quaisquer números repetidos, os restantes 4 algarismos podem ser escolhidos de 6A_4 formas diferentes. Logo, o número de casos favoráveis é $2 \times {}^7C_3 \times {}^6A_4$.

Pela Regra de Laplace obtém-se que a probabilidade pedida é $p = \frac{2 \times {}^7C_3 \times {}^6A_4}{9 \times 10^6} = \frac{7}{2500}$.

Resposta: (A)

4.

- 4.1. Seja A o acontecimento "o livro escolhido é do 12º ano", e B o acontecimento "o livro escolhido é um manual". Do enunciado, vem que: $P(A) = 3P(\bar{A})$, $P(B|A) = \frac{2}{5}$ e $P(\bar{A}|\bar{B}) = 30\% = \frac{3}{10}$.

Pretende-se determinar $P(B)$.

Começando por notar que $P(A) = 3P(\bar{A}) \Leftrightarrow 1 - P(\bar{A}) = 3P(\bar{A}) \Leftrightarrow P(\bar{A}) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow P(A) = \frac{3}{4}$, tem-se:

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = P(B|A) \times P(A) + P(\bar{A}) - P(\bar{A} \cap \bar{B})$$

$$= P(B|A) \times P(A) + P(\bar{A}) - P(\bar{A}|\bar{B}) \times P(\bar{B})$$

$$= \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{4} - \frac{3}{10} (1 - P(B)) = \frac{3}{10} + \frac{1}{4} - \frac{3}{10} + \frac{3}{10} P(B)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{3}{10} P(B)$$

de onde vem $P(B) = \frac{1}{4} + \frac{3}{10} P(B) \Leftrightarrow P(B) = \frac{1/4}{7/10} = \frac{5}{14}$.

- 4.2. Dos 140 livros da estante do Professor, sabe-se que $140 \times \frac{3}{4} = 105$ desses são do 12º ano, e $140 - 105 = 35$ livros são do 10º ou 11º ano. Entre esses, sabe-se que dois em cada cinco são manuais, pelo que existem 42 manuais do 12º ano e $105 - 42 = 63$ livros de exercícios do 12º ano.

Como pelo menos 9 dos 10 livros doados deverão ser do 12º ano e exatamente 5 desses mesmos deverão ser manuais do 12º ano, existem duas possibilidades de escolher os livros:

- são doados 9 livros do 12º ano e 1 livro de um outro ano, sabendo que 5 desses 9 livros do 12º ano deverão ser manuais: ${}^{42}C_5 \times {}^{63}C_4 \times {}^{35}C_1$;
- são doados 10 livros do 12º ano, sabendo que 5 desses 10 livros do 12º ano deverão ser manuais: ${}^{42}C_5 \times {}^{63}C_5$;

Desta forma, a escolha dos livros pode ser feita de ${}^{42}C_5 \times {}^{63}C_4 \times {}^{35}C_1 + {}^{42}C_5 \times {}^{63}C_5 = {}^{42}C_5 \times ({}^{63}C_4 \times 35 + {}^{63}C_5)$.

5. Designe-se a reta tangente ao gráfico de f no ponto P , ponto do gráfico de f de abcissa a , por s . A reta s tem declive $m_s = f'(a)$. Uma vez que a reta r é perpendicular à reta s , tem-se que o seu declive, m_r , é tal que $m_r = -\frac{1}{m_s}$.

Tem-se que:

$$f'(x) = (5 - x^2 e^{0,01x} + \ln x)' = (5)' - [(x^2)'(e^{0,01x}) + x^2(e^{0,01x})'] + (\ln x)' = -2xe^{0,01x} - 0,01x^2 e^{0,01x} + \frac{1}{x}$$

Sabe-se ainda que $[OQ]$ é um lado de um quadrado cuja medida da área é 2 u.a. Logo, pode-se escrever $\overline{OQ}^2 = 2 \Leftrightarrow \overline{OQ} = \sqrt{2}$. Desta forma, como o ponto Q pertence ao eixo Ox , sabe-se que $Q(-\sqrt{2}, 0)$ ou $Q(\sqrt{2}, 0)$. Esse ponto Q é também a interseção da reta r com o eixo Ox .

A equação da reta r é $y = m_r x + b$, tal que $y = -\frac{1}{m_s} x + b \Leftrightarrow y = -\frac{1}{f'(a)} x + b$.

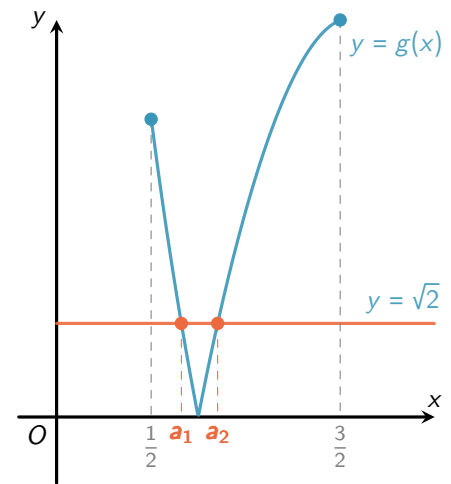
Como passa em $(a, f(a))$, tem-se:

$$f(a) = -\frac{a}{f'(a)} + b \Leftrightarrow b = f(a) + \frac{a}{f'(a)}, \text{ pelo que a reta } r \text{ é definida pela equação}$$

$$y = -\frac{1}{f'(a)} x + f(a) + \frac{a}{f'(a)}.$$

Como a reta r contém o ponto Q têm-se duas hipóteses:

- Se $Q(-\sqrt{2}, 0)$, tem-se $\frac{\sqrt{2}}{f'(a)} + f(a) + \frac{a}{f'(a)} = 0 \Leftrightarrow f'(a) \cdot f(a) + a = -\sqrt{2}$;
- Se $Q(\sqrt{2}, 0)$, tem-se $-\frac{\sqrt{2}}{f'(a)} + f(a) + \frac{a}{f'(a)} = 0 \Leftrightarrow f'(a) \cdot f(a) + a = \sqrt{2}$;
- Equivalentemente às duas condições acima, pode-se optar por resolver $|f'(a) \cdot f(a) + a| = \sqrt{2}$.



Na figura acima está representado o gráfico de $g(x) = |f'(x) \cdot f(x) + x| = \sqrt{2}$ em $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$. Recorrendo às capacidades gráficas

da calculadora poderão determinar-se as soluções da equação $g(x) = \sqrt{2}$. Conclui-se então que existem dois pontos que são solução da equação acima. As abcissas desses mesmos são os possíveis valores de a : $a \approx 0,66$ e $a \approx 0,85$ (representados na figura como a_1 e a_2 , respetivamente).

6. Uma vez que $v_{n+1} - \frac{2}{3}v_n = 0 \Leftrightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2}{3}, \forall n \in \mathbb{N}$, tem-se que (v_n) é uma progressão geométrica de razão $r = \frac{2}{3}$.

Tem-se ainda:

$$v_2 \times v_3 = \frac{9}{2} \Leftrightarrow v_2 \times (v_2 \times r) = \frac{9}{2} \Leftrightarrow (v_2)^2 \times \frac{2}{3} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow v_2 = \pm \sqrt{\frac{9/2}{2/3}} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} v_2 = \sqrt{\frac{27}{4}} \Leftrightarrow v_2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow v_1 = \frac{v_2}{r} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{4}.$$

em que se usou o facto de (v_n) ser uma sucessão de termos positivos em (1).

$$\text{O termo geral de } (v_n) \text{ é } v_n = v_1 \times r^{n-1} = \frac{9\sqrt{3}}{4} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}.$$

De forma a que $\frac{8\sqrt{3}}{27}$ seja um termo de (v_n) é necessário que exista um $k \in \mathbb{N}$ tal que $v_k = \frac{8\sqrt{3}}{27}$. Ora:

$$v_k = \frac{8\sqrt{3}}{27} \Leftrightarrow \frac{9\sqrt{3}}{4} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = \frac{8\sqrt{3}}{27} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = \frac{8 \times 4}{27 \times 9} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = \frac{2^5}{3^5} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^5 \Leftrightarrow k-1 = 5 \Leftrightarrow k = 6$$

pelo que se conclui que $\frac{8\sqrt{3}}{27}$ é o termo de ordem 6 de (v_n) .

7. Tem-se que $|w| = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{12 + 4} = \sqrt{16} = 4$, e $\text{Arg}(-2\sqrt{3} + 2i) = \text{tg}^{-1}\left(\frac{2}{-2\sqrt{3}}\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \stackrel{(1)}{=} \frac{5\pi}{6}$, em que se usou o facto do afixo de w pertencer ao 2^o quadrante em (1).

Com auxílio da figura abaixo vão ser analisadas cada uma das afirmações:

- Note-se que o triângulo $[ABO]$ é retângulo em O , logo $\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 = \overline{AB}^2$. Como $|w| = \overline{OA} = \overline{OB}$, tem-se que $\overline{AB}^2 = 4^2 + 4^2 = 32$. Visto que a área do quadrado $[ABCD]$ é dada por \overline{AB}^2 , conclui-se que a área é 32 u.a. A afirmação (A) é verdadeira.
- A e G são afixos de duas raízes quintas de um mesmo número complexo. Como $G\hat{O}A = G\hat{O}H + H\hat{O}A = \frac{2\pi}{5} + \frac{2\pi}{5} = \frac{4\pi}{5}$, pode-se escrever que G é o afixo do número complexo w_G , tal que $|w_G| = |w| = 4$ e $\text{Arg}(w_G) = \text{Arg}(w) - \frac{4\pi}{5} = \frac{5\pi}{6} - \frac{4\pi}{5} = \frac{\pi}{30}$. Logo, $w_G = 4e^{i\left(\frac{\pi}{30}\right)}$. A afirmação (B) é verdadeira.

9.

9.1. Tem-se que $\lim u_n = \lim \frac{n^2 - n}{n - 1} = \lim \frac{n^2}{n} = \lim n = +\infty$, pelo que $\lim (-u_n) = -\infty$.

Desta forma, conclui-se que:

$$\begin{aligned} \lim g(-u_n) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 4}}{x + 1} \stackrel{||\infty||}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2}\right)}}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x + 1} \times \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2}} \\ &\stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x + 1} \times \sqrt{1 + \frac{1}{+\infty} + \frac{4}{+\infty}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x} \times \sqrt{1 + 0 + 0} = -1 \times 1 = -1 \end{aligned}$$

em que se usou o facto de $\sqrt{x^2} = |x| = -x, \forall x < 0$ em (1).

Resposta: (B)

9.2. Para $x \geq -1$ tem-se $g(x) = 8^x - 13 \times 4^x = 2^{3x} - 13 \times 2^{2x}$. Tem-se então:

$$\begin{aligned} g(x) + 9 \times 2^{x+2} \geq 0 &\Leftrightarrow 2^{3x} - 13 \times 2^{2x} + 9 \times 2^{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow 2^x (2^{2x} - 13 \times 2^x + 9 \times 2^2) \geq 0 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} 2^{2x} - 13 \times 2^x + 36 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (2^x)^2 - 13 \times 2^x + 36 \geq 0 \end{aligned}$$

em que se usou o facto de $2^x > 0, \forall x \geq -1$ em (1).

Note-se que:

$$\begin{aligned} (2^x)^2 - 13 \times 2^x + 36 = 0 &\Leftrightarrow 2^x = \frac{-(-13) \pm \sqrt{(-13)^2 - 4 \times 1 \times 36}}{2 \times 1} \Leftrightarrow 2^x = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{2} \Leftrightarrow 2^x = \frac{13 \pm 5}{2} \\ &\Leftrightarrow 2^x = 4 \vee 2^x = 9 \Leftrightarrow x = \log_2 4 \vee x = \log_2 9 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = \log_2 9 \end{aligned}$$

Concluindo-se que $g(x) + 9 \times 2^{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow (2^x - 4)(2^x - 9) \geq 0$.

Através de uma tabela de sinal, obtém-se:

| | | | | | | |
|----------------------|------|---|-----|---|------------|-----------|
| x | -1 | | 2 | | $\log_2 9$ | $+\infty$ |
| $2^x - 4$ | - | - | 0 | + | + | + |
| $2^x - 9$ | - | - | - | - | 0 | + |
| $(2^x - 4)(2^x - 9)$ | + | + | 0 | - | 0 | + |

Logo, o conjunto-solução da inequação $g(x) + 9 \times 2^{x+2} \geq 0$ é $[-1, 2] \cup [\log_2 9, +\infty[$.

10. O ponto $A(x_A, y_A)$ pertence à circunferência e ao eixo Oy , logo $x_A = 0$, e portanto:

$$(0 - 1)^2 + (y_A - 2)^2 = 5 \Leftrightarrow (y_A - 2)^2 = 4 \Leftrightarrow y_A - 2 = \pm 2 \Leftrightarrow y_A = 0 \vee y_A = 4, \text{ e como } y_A > 0, \text{ tem-se que } A(0, 4).$$

A reta s tem inclinação $\frac{\pi}{4}$, pelo que o seu declive é $m_s = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$. Como passa em A , a sua ordenada na origem é 4, a equação reduzida que define a reta é $y = x + 4$.

A reta r é tangente à circunferência no ponto de coordenadas $(3, 1)$, logo tomando $P(x, y)$ como um ponto da reta r , tem-se $\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, em que C é o centro da circunferência de coordenadas $(1, 2)$.

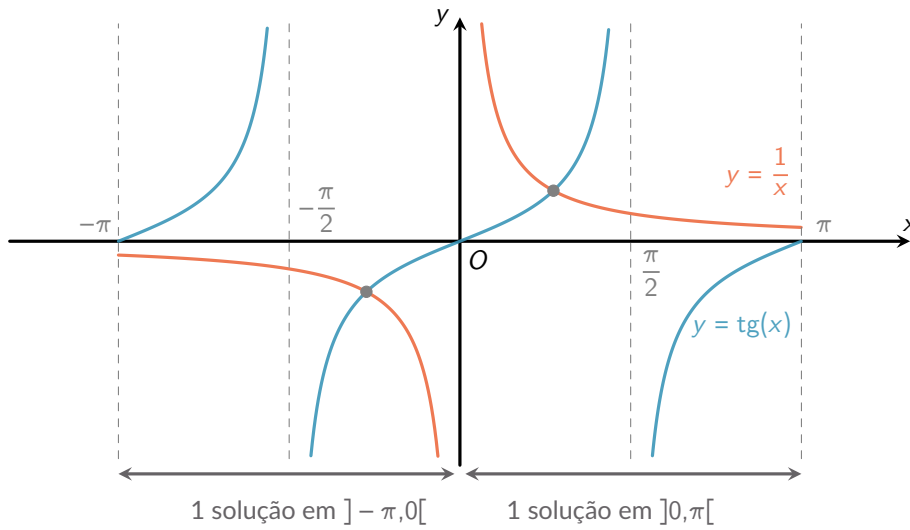
Como $\overrightarrow{BP} = P - B = (x, y) - (3, 1) = (x - 3, y - 1)$, e $\overrightarrow{BC} = C - B = (1, 2) - (3, 1) = (-2, 1)$, tem-se:

$$\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow (x - 3, y - 1) \cdot (-2, 1) = 0 \Leftrightarrow -2(x - 3) + y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = 2x - 5.$$

O ponto de interseção das retas r e s é tal que $x + 4 = 2x - 5 \Leftrightarrow x = 9$, e a sua ordenada é $9 + 4 = 13$. Logo, as coordenadas de T são $(9, 13)$.

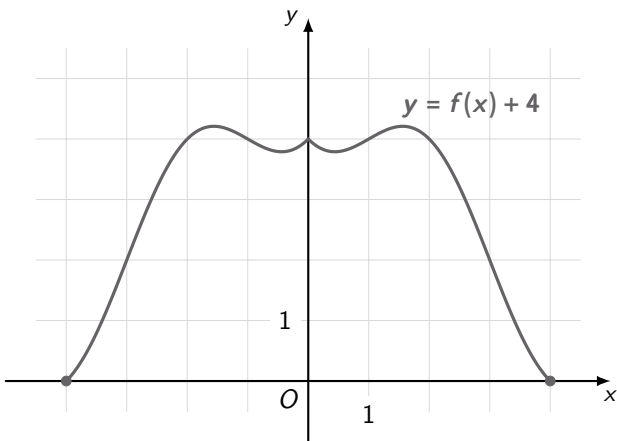
Resposta: (D)

11. Repare que $x \operatorname{tg} x = 1 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{1}{x}$, pelo que em cada intervalo da forma $]k\pi, \pi + k\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$ (ver figura abaixo), a equação tem exatamente uma solução. Logo, em $] - 20\pi, 20\pi[$, a equação tem 40 soluções.

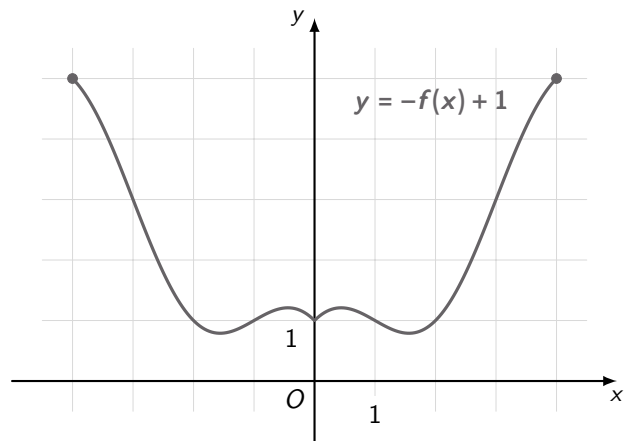


Resposta: (C)

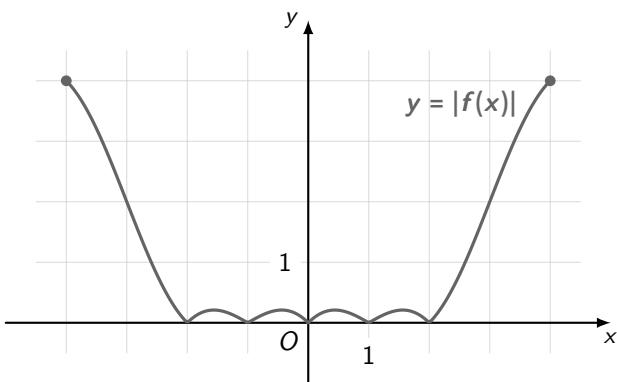
12. A função f tem cinco zeros e é tal que o seu máximo absoluto tem valor menor que 1 e o seu mínimo valor é -4 . Uma vez que a função h definida por $h(x) = \ln(g(x))$ está definida em $[-4, 4]$, tem-se que $g(x) > 0, \forall x \in [-4, 4]$.



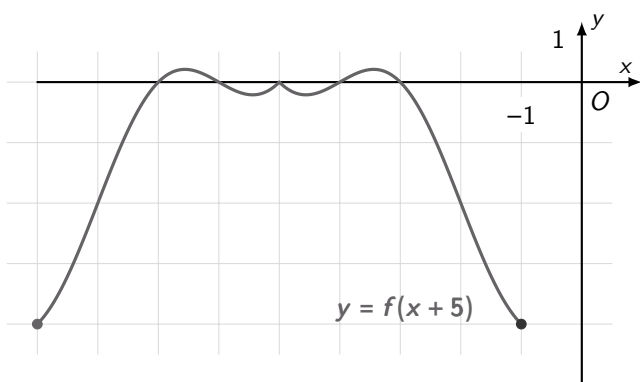
Esboço de $y = f(x) + 4$



Esboço de $y = -f(x) + 1$



Esboço de $y = |f(x)|$



Esboço de $y = f(x + 5)$

Por observação dos gráficos acima conclui-se que, entre as opções dadas, apenas $g(x) = -f(x) + 1$ é uma expressão analítica válida de forma a que a função h tenha domínio $[-4, 4]$.

Resposta: (B)

13.

13.1. Averiguemos a continuidade da função f no ponto de abcissa 0. De forma a que f seja contínua nesse ponto deve verificar-se $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

Note-se que $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = \sin^3(0) - \cos(0) = 0 - 1 = -1$, e que:

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 \ln x}{e^{2x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{e^{2x} - 1} \times \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x)$, de tal forma que:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{e^{2x} - 1} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{e^{2x} - 1} \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{2} \times \frac{1}{\lim_{2x \rightarrow 0^+} \frac{e^{2x} - 1}{2x}} \stackrel{(2)}{=} \frac{1}{2} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{2}, \text{ em que se usou o facto de } x \rightarrow 0^+ \Rightarrow 2x \rightarrow 0^+ \text{ em}$$

(1), e o limite notável $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u} = 1$ em (2).

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) \stackrel{(3)}{=} \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{y} \ln \left(\frac{1}{y} \right) \right) \stackrel{(4)}{=} - \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{y} \stackrel{(5)}{=} 0, \text{ em que se usou a mudança de variável } y = \frac{1}{x} \text{ de tal forma}$$

que $x \rightarrow 0^+ \Rightarrow y \rightarrow +\infty$ em (3), a propriedade dos logaritmos $\ln \left(\frac{1}{y} \right) = \ln(y^{-1}) = -\ln y$ em (4), e o limite notável

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln u}{u} = 0 \text{ em (5).}$$

Concluindo-se que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{1}{2} \times 0 = 0$, logo como $-1 \neq 0$, conclui-se que f não é contínua em $x = 0$ e, consequentemente, não é contínua no seu domínio.

13.2. A função f não é contínua em $x = 0$ pelo que não estão asseguradas as condições necessárias para aplicação do Teorema de Bolzano em $\left] -\frac{\pi}{2}, e \right[$. Conclui-se então que a afirmação I) é falsa.

Considerando $\cos x = \cos^2 \left(\frac{x}{2} \right) - \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right)$, vem que $1 - \cos x = \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right) + \cos^2 \left(\frac{x}{2} \right) - \left[\cos^2 \left(\frac{x}{2} \right) - \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right) \right] = 2 \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right)$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) + 1}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin^3 x - \cos x + 1}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin^3 x}{x^3} + \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \cos x}{x^3} = \left(\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} \right)^3 + \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right)}{x^3} \\ &\stackrel{(1)}{=} 1^3 + 2 \times \left(\frac{1}{2} \lim_{\frac{x}{2} \rightarrow 0^-} \frac{\sin \left(\frac{x}{2} \right)}{\frac{x}{2}} \right) \times \left(\frac{1}{2} \lim_{\frac{x}{2} \rightarrow 0^-} \frac{\sin \left(\frac{x}{2} \right)}{\frac{x}{2}} \right) \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} \stackrel{(2)}{=} 1 + 2 \times \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{0^-} = 1 + (-\infty) = -\infty \end{aligned}$$

em que se usou o limite notável $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$, e o facto de $x \rightarrow 0^+ \Rightarrow \frac{x}{2} \rightarrow 0^+$ em (1), e novamente o mesmo limite notável em (2). Conclui-se então que a afirmação II) é falsa.

A função f admite uma assíntota horizontal ao gráfico de f se e só se o valor de $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ for finito. Tem-se:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \ln x}{e^{2x} - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2 \ln x}{x^3}}{\frac{e^{2x} - 1}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x^3} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3}} \stackrel{(3)}{=} 0 \times \frac{1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - \frac{1}{+\infty}} \\ &\stackrel{(4)}{=} 0 \times \frac{1}{+\infty \times (+\infty) - 0} = 0 \times \frac{1}{+\infty} = 0 \times 0 = 0 \end{aligned}$$

em que se usou o limite notável $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln u}{u} = 0$ em (3), e o limite notável $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^u}{u^p} = +\infty, p \in \mathbb{R}$ em (4). Conclui-se que $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de f , e a afirmação III) é verdadeira.

Resposta: (C)

13.3. Em $\left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \right]$, $f(x) = \sin^3 x - \cos x$, logo a expressão analítica de g' é $g'(x) = \sin^3 x - \cos x + \frac{1}{4} \cos x = \sin^3 x - \frac{3}{4} \cos x$.

A segunda derivada de g, g'' , é dada por:

$$\begin{aligned} g''(x) &= \left(\sin^3 x - \frac{3}{4} \cos x \right)' = \left(\sin^3 x \right)' - \left(\frac{3}{4} \cos x \right)' = 3 \sin^2 x \cos x - \left(-\frac{3}{4} \sin x \right) = \sin x \left(3 \sin x \cos x + \frac{3}{4} \right) \\ &= \sin x \left(\frac{3}{2} \sin(2x) + \frac{3}{4} \right) \end{aligned}$$

peço que, em \mathbb{R} , os zeros de g'' são:

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x \left(\frac{3}{2} \sin(2x) + \frac{3}{4} \right) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \vee \frac{3}{2} \sin(2x) + \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \vee \sin(2x) = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \pi k \vee 2x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k \vee 2x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k \Leftrightarrow x = \pi k \vee x = -\frac{\pi}{12} + \pi k \vee x = -\frac{5\pi}{12} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Ora, averiguem-se as soluções da equação acima em $\left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right]$:

- para $k = -2$, tem-se $x = -2\pi \vee x = -\frac{\pi}{12} - 2\pi = -\frac{25\pi}{12} \vee x = -\frac{5\pi}{12} - 2\pi = -\frac{29\pi}{12} \rightarrow$ nenhuma destas soluções pertence ao intervalo $\left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right]$;
- para $k = -1$, tem-se $x = -\pi \vee x = -\frac{\pi}{12} - \pi = -\frac{13\pi}{12} \vee x = -\frac{5\pi}{12} - \pi = -\frac{17\pi}{12} \rightarrow$ todas estas soluções pertencem ao intervalo $\left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right]$;
- para $k = 0$, tem-se $x = 0 \vee x = -\frac{\pi}{12} \vee x = -\frac{5\pi}{12} \rightarrow$ nenhuma destas soluções pertence ao intervalo $\left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right]$.

Estudando o sinal de g'' através de uma tabela de sinal obtém-se:

| | | | | | | | | | |
|----------|-------------------|---|---------------------|---|---------------------|---|--------|---|------------------|
| x | $-\frac{3\pi}{2}$ | | $-\frac{17\pi}{12}$ | | $-\frac{13\pi}{12}$ | | $-\pi$ | | $-\frac{\pi}{2}$ |
| $g''(x)$ | + | + | 0 | - | 0 | + | 0 | - | - |
| $g(x)$ | | ∪ | p.i | ∩ | p.i | ∪ | p.i | ∩ | |

Conclui-se então que:

- o gráfico de g tem concavidade voltada para cima em $\left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{17\pi}{12}\right]$ e em $\left[-\frac{13\pi}{12}, -\pi\right]$;
- o gráfico de g tem concavidade voltada para baixo em $\left[-\frac{17\pi}{12}, -\frac{13\pi}{12}\right]$ e em $\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$;
- o gráfico de g admite três pontos de inflexão nos pontos de abscissa $x = -\frac{17\pi}{12}$, $x = -\frac{13\pi}{12}$ e $x = -\pi$.

FIM