Grupo Recursos para Matemática

Prova Modelo de Exame Nacional de Matemática A
Prova 635 | Ensino Secundário | Junho de 2020
12º Ano de Escolaridade

Prova 635

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 9 Páginas

- Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.
- Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.
- É permitido o uso de régua, compasso, esquadro e transferidor.
- Apresente apenas uma resposta para cada item.
- As cotações dos itens encontram-se no final da prova.

- A prova inclui um formulário.
- Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.
- Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

- Itens cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final:

2.1, **2.2**, **5.2** e **6**

Estes itens estão assinalados no enunciado através de uma moldura que os rodeia.

- Dos restantes 14 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência
αr (α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)

Área de um polígono regular:
Semiperímetro $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:
$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)

Área lateral de um cone:
$\pi r g$ (r - raio da base; g - geratriz)

Área de uma superfície esférica:
$4\pi r^2$ (r - raio)

Volume de uma pirâmide:
$\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de um cone:
$\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de uma esfera:
$\frac{4}{3}\pi r^3$ (r - raio)

Progressões:

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética:
$\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica:
$u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

Complexos

$\left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ ($k \in \{0, ..., n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u^n)' = nu^{n-1}u'$ ($n \in \mathbb{R}$)

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'e^u$

$(a^u)' = u'a^u \ln a$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ ($n \in \mathbb{N}$)

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

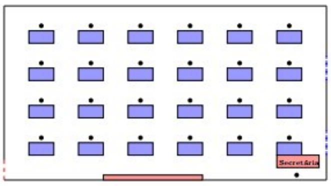
$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$ ($p \in \mathbb{R}$)

1. (Inês Cruz)

Uma parte do ginásio da escola A foi transformado numa sala de aula para serem leccionadas matérias presenciais a turmas do 11.º e 12.º anos, de acordo com as indicações da DGS.

Desta forma colocaram-se 24 mesas, distribuídos por quatro filas de seis mesas, cumprindo o distanciamento obrigatório.



Na aula de matemática do 12.º A vão estar presentes dezoito alunos distribuídos pelas mesas, de modo que:

- todos os lugares livres situam-se nos extremos das filas
- o Rui e a Maria ficam sempre na fila da frente e em mesas consecutivas

Nestas condições, de quantas maneiras se podem sentar os alunos?

(A) ${}^8C_6 \times 18!$

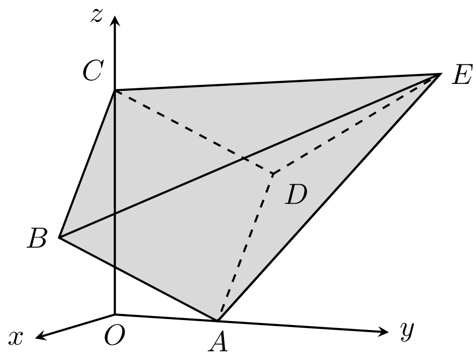
(B) ${}^8C_6 \times 3 \times 2!$

(C) $2 \times 2! \times^7 C_6 \times 16! + 3 \times 2! \times^8 C_6 \times 16!$

(D) $2! \times^7 C_6 \times 16! + 3 \times 2! \times^8 C_6 \times 16!$

2. (Carlos Frias)

Na figura está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide quadrangular regular $[ABCDE]$.



Sabe-se que:

- o vértice A pertence ao eixo das ordenadas e o vértice C pertence ao eixo das cotas
- o plano α, que contém a base da pirâmide, é definido por $2y + z = 6$
- a equação $x^2 + y^2 + z^2 - 19y - 14z + \dfrac{237}{4} = 0$ define a superfície esférica centrada no vértice E e que é tangente ao plano α

2.1. Defina por uma equação vetorial a reta que contém a altura da pirâmide.

2.2. Determine o volume da pirâmide $[ABCDE]$.
Apresente o valor do volume na forma $a\sqrt{b}$ com $a, b \in \mathbb{N}$.

3. (Ricardo Ferreira)

Seja Ω, conjunto finito, o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).

Sabe-se que:

- $P\left(A \cup B\right) = 0,8$
- $P\left(A|B\right) = \dfrac{1}{3}$
- $P\left(A\right) = 2P\left(B\right)$

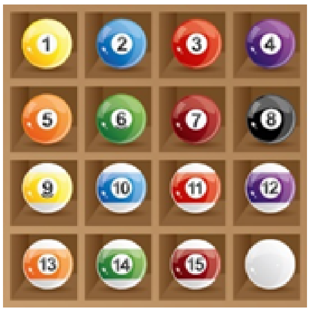
Qual é o valor de $P\left(B\right)$?

(A) $0,1$ **(B)** $0,2$ **(C)** $0,3$ **(D)** $0,4$

4. (Paulo Naves Pedro)

Num jogo de bilhar há 16 bolas, sendo quinze numeradas de 1 a 15 e mais uma bola branca sem número.

As bolas são guardadas numa caixa que está dividida em dezasseis espaços (4 linhas e 4 colunas), ficando uma e uma só bola em cada espaço.

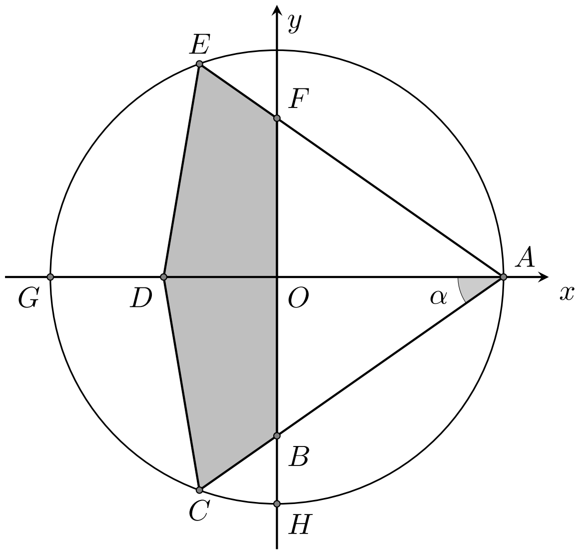


4.1. Do conjunto das bolas numeradas, são escolhidas, ao acaso, cinco.
Qual é a probabilidade de obter cinco bolas com números consecutivos?
Apresente o valor pedido na forma de fração irredutível.

4.2. As bolas são distribuídas, ao acaso, pelos espaços da caixa.
Determine a probabilidade de pelo menos uma das duas diagonais ficar preenchida com bolas com número ímpar.
Apresente o valor pedido na forma de percentagem com aproximação às décimas.

5. (Manuel Gonçalves)

Na figura está representada, num referencial o.n. xOy, uma circunferência com centro na origem e raio 4 e o pentágono $[BCDEF]$.



Sabe-se que:

- α é a amplitude, em radianos, do ângulo DAC
- A e G são os pontos de interseção da circunferência com o eixo das abcissas
- H é o ponto de interseção da circunferência com o semieixo negativo das ordenadas
- D é um ponto do eixo das abcissas tal que $\overline{AD} = 6$
- C desloca-se na circunferência, do ponto H para o ponto G, tal que $-\frac{\pi}{4} < \alpha < 0$
- B é o ponto de interseção da reta AC com o eixo das ordenadas
- os pontos E e F são, respetivamente, imagens de C e B por meio de uma reflexão em Ox

5.1. O comprimento do segmento $[AC]$ é dado, em função de α, por:

(A) $8\cos\alpha$ **(B)** $8\sin\alpha$ **(C)** $-8\cos\alpha$ **(D)** $-8\sin\alpha$

5.2.

Mostre que a área da região sombreada pode ser dada, em função de α, por

$$A(\alpha) = -16\tan\alpha\left(3\cos^2\alpha - 1\right)$$

Em seguida, com recurso à calculadora, determine o valor de α para o qual a área da região a sombreado da figura é igual à área do setor circular GOE.

Na sua resposta deve:

- equacionar o problema
- apresentar o(s) gráfico(s) que considerar necessário(s)
- apresentar o valor pedido, arredondado às centésimas

6. (Vitor Corveira)

Os três primeiros termos de uma progressão aritmética (u_n) são, respetivamente, -1, $\ln a$ e $\ln a^3$, com $a > 0$.

Determine a soma dos 20 primeiros termos da sucessão (u_n).

Mostre como chegou à sua resposta.

7. (José Manuel Santos Gabriel)

O número complexo $2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{15}\right) + i\sin\left(\frac{14\pi}{15}\right)\right]$ é uma das raízes quintas de:

(A) $16\sqrt{3} + 16i$ **(B)** $32\sqrt{3} + 32i$ **(C)** $8 + 8\sqrt{3}i$ **(D)** $16 + 16\sqrt{3}i$

8. (Carla Coelho e Idália Oliveira)

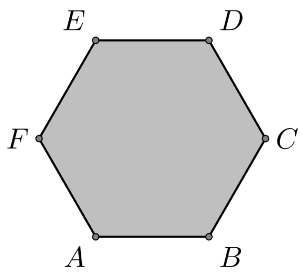
Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i$, $z_2 = \sqrt{3}e^{i\frac{17\pi}{16}}$ e z_3 tal que:

$$\frac{(z_1)^3 \times (-\overline{z_2})^4}{z_3} \times i^{49} \in \mathbb{R}^-$$

Escreva z_3 na forma algébrica, sabendo que o seu afixo pertence à circunferência centrada na origem e que contém o afixo de z_1.

9. (Ricardo Ferreira)

Na figura está representado um hexágono regular $[ABCDEF]$ de lado 2.



O valor de $\overrightarrow{DA} \cdot \left(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{FA}\right)$ é:

(A) -8 **(B)** -4 **(C)** -2 **(D)** 8

10. (Manuel Gonçalves)

Considere $a, b \in \mathbb{R}$ com $a > 1$ e $b > 1$ tais que $\sqrt{b} = a^3$.

O valor numérico da expressão $\log_a b^3 + \log_b a$ é:

(A) $\frac{109}{6}$ **(B)** $\frac{37}{6}$ **(C)** $\frac{55}{3}$ **(D)** $\frac{19}{6}$

11. (Sofia Sousa)

Seja f uma função derivável em $\mathbb{R}$ e r a reta tangente ao gráfico de f no ponto de coordenadas $(1,3)$.

Sabe-se que a reta r é perpendicular à reta de equação $3y = x$.

Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - x}{3f\,(x) - 9}$?

(A) -1 **(B)** $-\dfrac{1}{9}$ **(C)** $\dfrac{1}{9}$ **(D)** 1

12. (José Carlos Pereira)

Sejam f , g e h três funções contínuas no seu domínio, tais que:

- o domínio de f é $\mathbb{R}$, o ponto de coordenadas $(-1, 2)$ pertence ao seu gráfico e a reta de equação $y = 3 - 2x$ é assíntota do seu gráfico, quando $x \to \pm\infty$
- o domínio de g é $\mathbb{R}$ e a sua derivada, também de domínio $\mathbb{R}$, é definida por $g'\,(x) = \dfrac{x^2}{e^x + x^2}$
- o domínio de h é $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ e é definida por $h\,(x) = \dfrac{x^2 f\,(x)}{x^3 + 1} + g'\,(x)$

12.1. Estude a função g quanto ao sentido das concavidades e à existência de pontos de inflexão do seu gráfico.

Na sua resposta deve:

- indicar o(s) intervalo(s) onde o gráfico de g tem a concavidade voltada para cima
- indicar o(s) intervalo(s) onde o gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo
- indicar as abcissas do(s) ponto(s) de inflexão

12.2. Estude a função h quanto à existência de assíntotas do seu gráfico, paralelas aos eixos coordenados.

Caso exista(m), indique a(s) sua(s) equação(ões).

13. (Eduardo Carvalho e José Carlos Pereira)

Para um certo valor real k, considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right)}{3x} & \text{se } x < 0 \\[2ex] k & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\[2ex] \dfrac{\ln\,(2x-1)}{3x^2 - 3x} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

13.1. Mostre que f pode ser contínua em $\mathbb{R}$.

13.2. Mostre que existe pelo menos um $c \in \,]2,3[$ tal que $f\,(c) = f'\left(-\dfrac{3\pi}{2}\right)$.

FIM

Cotações

1. .... 16 pontos

2.

2.1. .... 20 pontos

2.2. .... 16 pontos

3. .... 16 pontos

4.

4.1. .... 16 pontos

4.2. .... 16 pontos

5.

5.1. .... 16 pontos

5.2. .... 16 pontos

6. .... 20 pontos

7. .... 16 pontos

8. .... 16 pontos

9. .... 16 pontos

10. .... 16 pontos

11. .... 16 pontos

12.

12.1. .... 16 pontos

12.2. .... 16 pontos

13.

13.1. .... 16 pontos

13.2. .... 16 pontos

Soluções

1. C

2.

2.1. $(x, y, z) = \left(0, \frac{19}{2}, 7\right) + k\,(0, 2, 1)\,,\ k \in \mathbb{R}$ (ou equivalente)

2.2. $30\sqrt{5}$

3. C

4.

4.1. $\frac{1}{273}$

4.2. 7.7%

5.

5.1. A

5.2. $\alpha \approx -0,67$

6. 360

7. D

8. $-1 - i$

9. A

10. A

11. B

12.

12.1. Conc. vol. p. cima $[0, 2]$
Conc. vol. p. baixo $]-\infty, 0]$ e $[2, +\infty[$
Abcissas dos pontos de inflexão $x = 0$ e $x = 2$

12.2. $x = -1$, $y = -1$ e $y = -2$ (ou equivalentes)

13.

13.1. A função f pode ser contínua e, nesse caso, k tem que ser igual a $\frac{2}{3}$

Coordenação: José Carlos Pereira

Paginação: Carlos Frias

Verificação de resultados:
Rafael Saraiva, Mafalda Costa, Nuno Godinho, Sofia Sousa, José Carlos Pereira e Carlos Frias