Proposta de resolução

1. Duas situações podem ocorrer:

- O Rui ou a Maria ficam num dos extremos da 1.ª fila;
- Nenhum dos dois fica num dos extremos da 1.ª fila.

No primeiro caso: $2 \times 2! \times^7 C_6 \times 16!$

- 2 representa o número de formas de colocar os dois alunos alinhados num dos extremos da 1.ª fila (à direita ou à esquerda);
- 2! representa o número de permutações entre o Rui e a Maria;
- Existem $^7C_6$ formas de escolher 6 dos 7 restantes lugares nos extremos para ficarem desocupados;
- 16! representa o número de formas de distribuir os restantes 16 alunos nos restastes 16 lugares.

No segundo caso: $3 \times 2! \times^8 C_6 \times 16!$

- 3 representa o número de formas de colocar os dois alunos (Rui e Maria) em mesas consecutivas na primeira fila sem nenhum deles estar num dos extremos (2.ª e 3.ª mesas ou 3.ª e 4.ª mesas ou 4.ª e 5.ª mesas);
- 2! representa o número de permutações entre o Rui e a Maria;
- Existem $^8C_6$ formas de escolher 6 dos 8 lugares nos extremos para ficarem desocupados;
- 16! representa o número de formas de distribuir os restantes 16 alunos nos restastes 16 lugares.

$\therefore\ 2 \times 2! \times^7 C_6 \times 16! + 3 \times 2! \times^8 C_6 \times 16!$

Opção **(C)**

2.

2.1.

$$x^2+y^2+z^2-19y-14z+\frac{237}{4}=0 \Leftrightarrow x^2+y^2-19y+\left(\frac{19}{2}\right)^2+z^2-14z+49=-\frac{237}{4}+\left(\frac{19}{2}\right)^2+49 \Leftrightarrow$$

$$x^2+\left(y-\frac{19}{2}\right)^2+(z-7)^2=80$$

Assim, $E\left(0,\frac{19}{2},7\right)$

A reta que contém a altura da pirâmide é perpendicular ao plano α, assim o vetor $\overrightarrow{n}=(0,2,1)$ que é normal ao plano α é um seu vetor diretor.

Uma equação vetorial que defina a reta que contém a altura da pirâmide é, por exemplo:

$$\therefore (x,y,z)=\left(0,\frac{19}{2},7\right)+k\,(0,2,1)\,,\ k\in\mathbb{R}$$

2.2. Por 2.1 a altura da pirâmide é $\sqrt{80} = 4\sqrt{5}$

$A\,(0, y, 0) \wedge A \in \alpha \Rightarrow 2y = 6 \Leftrightarrow y = 3$

$C\,(0, 0, z) \wedge C \in \alpha \Rightarrow z = 6$

Assim, $A\,(0, 3, 0)$ e $C\,(0, 0, 6)$

$[AC]$ é uma diagonal da base da pirâmide, assim, pelo teorema de Pitágoras:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \Leftrightarrow \sqrt{0^2 + 3^2 + 6^2}^2 = 2\overline{AB}^2 \Leftrightarrow$$

$$\overline{AB}^2 = \frac{45}{2} \Rightarrow \overline{AB} = \frac{3\sqrt{10}}{2}$$

$$\therefore V_{[ABCDE]} = \frac{1}{3}\overline{AB}^2 \times h = \frac{1}{3} \times \frac{45}{2} \times 4\sqrt{5} = 30\sqrt{5}$$

3.

$$P\,(A \cup B) = 0.8 \Leftrightarrow P\,(A) + P\,(B) - P\,(A \cap B) = 0.8 \Leftrightarrow 3P\,(B) - P\left(A|B\right) \times P\,(B) = 0.8 \Leftrightarrow$$

$$\frac{8}{3}P\,(B) = 0.8 \Leftrightarrow P\,(B) = 0.3$$

Opção **(C)**

4.

4.1. $P = \dfrac{15 - 5 + 1}{^{15}C_5} = \dfrac{11}{^{15}C_5} = \dfrac{1}{273}$

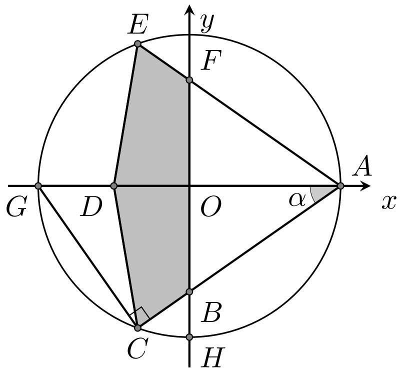
- Existem $^{15}C_5$ formas de escolher 5 bolas de entre as 15 bolas numeradas;
- Existem 11 formas de selecionar 5 bolas com números consecutivos (1 ao 5, 2 ao 6, 3 ao 7, 4 ao 8, 5 ao 9, 6 ao 10, 7 ao 11, 8 ao 12, 9 ao 13, 10 ao 14 e 11 ao 15).

4.2. $P = \dfrac{2 \times^{8} A_4 \times 12! - 8! \times 8!}{16!} \approx 7.7\%$

- 16! representa o número de formas de distribuir 16 bolas distintas por 16 posições;
- 2 representa o número de diagonais;
- $^{8}A_4$ representa o número de formas de distribuir 4 das 8 bolas com número ímpar pelos lugares de uma diagonal;
- 12! representa o número de formas de distribuir as restantes 12 bolas pelas restantes 12 posições;
- $8! \times 8!$ representa o número de formas de distribuir as 8 bolas com número ímpar pelas duas diagonais e as bolas com número par e a bola branca pelas restantes posições. Este valor tem que ser subtraído pois está a ser contabilizado em duplicado na primeira parcela.

5.

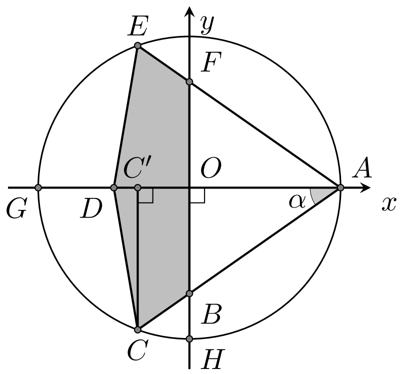
5.1.



$$\cos\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AG}} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{\overline{AC}}{8} \Leftrightarrow \overline{AC} = 8\cos\alpha$$

Opção **(A)**

5.2. Seja C' a projeção ortogonal de C sobre o eixo das abcissas.



$$\alpha \in \left]-\frac{\pi}{4}, 0\right[\Rightarrow -\tan\alpha = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \overline{OB} = -4\tan\alpha \quad \text{e} \quad \cos\alpha = \frac{\overline{OA}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{4}{\cos\alpha}$$

Os triângulos $[AOB]$ e $\left[AC'C\right]$ são semelhantes pois possuem ambos um ângulo reto e possuem um ângulo em comum.

Assim,

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CC'}}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \frac{8\cos\alpha}{\frac{4}{\cos\alpha}} = \frac{\overline{CC'}}{-4\tan\alpha} \Leftrightarrow \overline{CC'} = -8\tan\alpha\cos^2\alpha$$

$$A(\alpha) = 2\left(A_{[ACD]} - A_{[OAB]}\right) = 2\left[\frac{6\times\left(-8\tan\alpha\cos^2\alpha\right)}{2} - \frac{4\times(-4\tan\alpha)}{2}\right] =$$

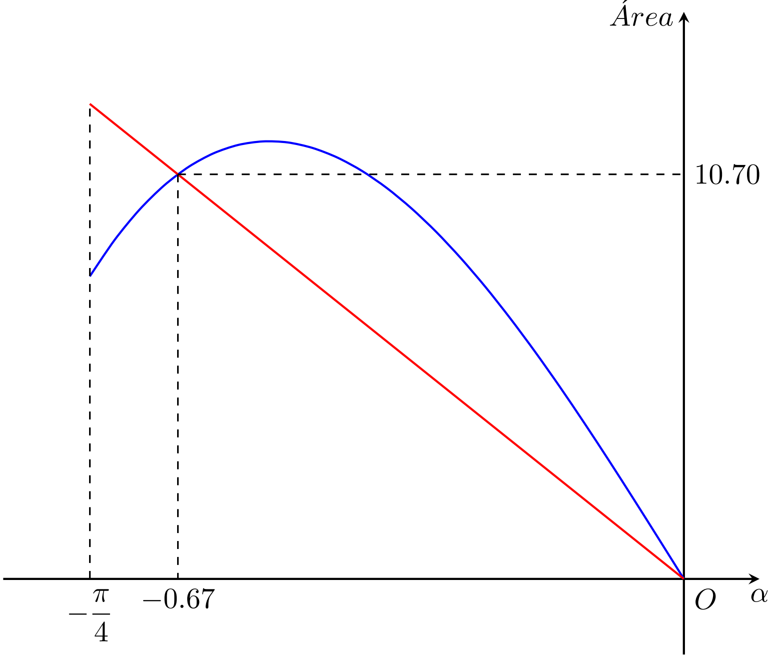
$$= -16\tan\alpha\left(3\cos^2\alpha - 1\right)$$

$G\hat{O}E = C\hat{O}G = -2\alpha$ pois COG é um ângulo ao centro de uma circunferência em cujo arco correspondente tem amplitude -2α (repare-se que CAG é um ângulo inscrito de amplitude $-\alpha$, portanto, o arco CG tem amplitude -2α).

Assim, a área do setor circular GOE é $A_S = \dfrac{-2\alpha}{2} \times 4^2 = -16\alpha$.

Pretende-se resolver, graficamente e em $\left]-\dfrac{\pi}{4}, 0\right[$, a equação:

$$-16 \tan\alpha \left(3\cos^2\alpha - 1\right) = -16\alpha$$



O valor de α para o qual a área da região sombreada é igual à área do sector circular GOE é, aproximadamente, -0.67.

6. Se (u_n) é uma progressão aritmética, então $u_3 - u_2 = u_2 - u_1 = r$, onde r é a razão da progressão aritmética.

$$u_3 - u_2 = u_2 - u_1 \Leftrightarrow \ln a^3 - \ln a = \ln a + 1 \Leftrightarrow \ln a^2 - \ln a = 1 \Leftrightarrow \ln a = 1 \Leftrightarrow a = e$$

$$r = \ln a + 1 \Leftrightarrow r = \ln e + 1 \Leftrightarrow r = 2 \qquad u_{20} = u_1 + 19r = -1 + 19 \times 2 = 37$$

A soma dos 20 primeiros termos é dada por:

$$S_{20} = \frac{u_1 + u_{20}}{2} \times 20 = \frac{-1 + 37}{2} \times 20 = 360$$

7.

$$z = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{15}\right) + i\sin\left(\frac{14\pi}{15}\right)\right] = 2\left[\cos\frac{\pi}{15} + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{15}\right)\right] = 2\left(\cos\frac{\pi}{15} + i\sin\frac{\pi}{15}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{15}}$$

$$z^5 = \left[2e^{i\frac{\pi}{15}}\right]^5 = 32e^{i\frac{\pi}{3}} = 32\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 16 + 16\sqrt{3}i$$

Opção **(D)**

8.

$$z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2} i \Rightarrow |z_1| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2} = \sqrt{2}$$

$$\operatorname{Arg}(z_1) = \pi - \arctan \frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \pi - \arctan \sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

Se o afixo de z_3 pertence à circunferência centrada na origem e que contém o afixo de z_1, então $|z_3| = |z_1| = \sqrt{2}$.

Assim, $z_3 = \sqrt{2}e^{i\theta}$, onde θ é um argumento de z_3.

$$z_2 = \sqrt{3}e^{i\frac{17\pi}{16}} \Rightarrow -\overline{z_2} = \sqrt{3}e^{i\left(\pi - \frac{17\pi}{16}\right)} = \sqrt{3}e^{i\left(-\frac{\pi}{16}\right)}$$

$$\begin{array}{cc|cc} 4 & 9 & 4 & \\ \cline{3-4} 0 & 9 & 1 & 2 \\ & 1 & & \end{array}$$

$$i^{49} = i$$

$$\frac{(z_1)^3 \times (-\overline{z_2})^4}{z_3} \times i^{49} = \frac{\left(\sqrt{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3 \times \left(\sqrt{3}e^{i\left(-\frac{\pi}{16}\right)}\right)^4}{\sqrt{2}e^{i\theta}} \times i = \frac{2\sqrt{2} \times 9e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{2}e^{i\theta}} \times e^{i\frac{\pi}{2}} = 18e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)}$$

Se pertence a $\mathbb{R}^-$, então $\frac{\pi}{4} - \theta = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = -\frac{3\pi}{4} - 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Assim, o argumento principal de z_3 será $-\frac{3\pi}{4}$.

$$\therefore z_3 = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right] = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1 - i$$

9.

$$\overrightarrow{DA} \cdot \left(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{FA}\right) = \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC} = 4 \times 2 \times \cos 180^{\text{o}} = -8$$

Opção **(A)**

10.

$$\sqrt{b} = a^3 \Leftrightarrow b = a^6$$

$$\log_a b^3 + \log_b a = \log_a \left(a^6\right)^3 + \frac{\log_a a}{\log_a b} = 18 + \frac{1}{\log_a a^6} = 18 + \frac{1}{6} = \frac{109}{6}$$

Opção **(A)**

11. Se a reta r é perpendicular à reta de equação $3y = x \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{3}x$, então o declive da reta r é -3. Assim $f'(1) = -3$ e $f(1) = 3$.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - x}{3f(x) - 9} = \frac{1}{3} \times \frac{\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x(x-1)}{x-1}}{\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1}} = \frac{1}{3} \times \frac{\displaystyle\lim_{x\to 1} x}{f'(1)} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{-3} = -\frac{1}{9}$$

Opção **(B)**

12.

12.1.

$$g''(x) = \left(\frac{x^2}{e^x + x^2}\right)' = \frac{2x\left(e^x + x^2\right) - x^2\left(e^x + 2x\right)}{\left(e^x + x^2\right)^2} = \frac{x\left(2e^x + 2x^2 - xe^x - 2x^2\right)}{\left(e^x + x^2\right)^2} = \frac{xe^x(2-x)}{\left(e^x + x^2\right)^2}$$

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ \underbrace{e^x = 0}_{\text{Eq. imp. em } \mathbb{R}} \ \vee \ 2 - x = 0 \ \wedge \ \underbrace{\left(e^x + x^2\right)^2 \neq 0}_{\text{Cond. universal em } \mathbb{R}} \Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ x = 2$$

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
$g''(x)$	-	0	$+$	0	-
g	$\cap$	p.i	$\cup$	p.i	$\cap$

O gráfico de g apresenta concavidade voltada para cima em $[0, 2]$.
O gráfico de g apresenta concavidade voltada para baixo $]-\infty, 0]$ e em $[2, +\infty[$.
As abcissas dos pontos de inflexão do gráfico de g são $x = 0$ e $x = 2$.

12.2.

$$h(x) = \frac{x^2 f(x)}{x^3 + 1} + g'(x) \Leftrightarrow h(x) = \frac{x^2 f(x)}{x^3 + 1} + \frac{x^2}{e^x + x^2}$$

$$\lim_{x\to -1^{\pm}} h(x) = \lim_{x\to -1^{\pm}} \left(\frac{x^2 f(x)}{x^3 + 1} + \frac{x^2}{e^x + x^2}\right) = \frac{f(1)}{0^{\pm}} + \frac{1}{e^{-1} + 1} = \frac{2}{0^{\pm}} + \frac{1}{e^{-1} + 1} = \pm\infty$$

A reta de equação $x = -1$ é assintota vertical bilateral ao gráfico de h. Não existem outras assintotas verticais pois h é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$$\lim_{x\to +\infty} h(x) = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2 f(x)}{x^3 + 1} + \frac{x^2}{e^x + x^2}\right) = \lim_{x\to +\infty} \left[\frac{f(x)}{x\left(1 + \dfrac{1}{x^3}\right)} + \frac{1}{\dfrac{e^x}{x^2} + 1}\right] =$$

$$\frac{\overbrace{\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}}^{\text{declive da assíntota}}}{\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^3}\right)} + \frac{1}{1 + \underbrace{\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^2}}_{\text{Limite notável}}} = \frac{-2}{1 + 0} + \frac{1}{1 + \infty} = -2$$

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2 f(x)}{x^3+1}+\frac{x^2}{e^x+x^2}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{f(x)}{x\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}+\frac{1}{\frac{e^x}{x^2}+1}\right] =$$

$$\frac{\overbrace{\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}}^{\text{declive da assíntota}}}{\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}+\frac{1}{\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^x}{x^2}+1\right)} = \frac{-2}{1+0}+\frac{1}{0+1} = -2+1 = -1$$

A reta de equação $y=-2$ é assintota horizontal ao gráfico de h quando $x\to+\infty$. A reta de equação $y=-1$ é assintota horizontal ao gráfico de h quando $x\to-\infty$.

13.

13.1. Para $x<0$ a função f é continua pois é o quociente entre funções contínuas, uma é a composta entre uma função trigonométrica e uma função polinomial e a outra é polinomial.

Para $0<x<1$ a função f é contínua por ser uma função constante.

Para $x>1$ a função f é contínua pois é o quociente entre funções contínuas, uma é a composta entre uma função logarítmica e uma polinomial, a outra é polinomial.

Resta analisar a continuidade de f em $x=0$ e $x=1$.

$f(0)=f(1)=k$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-}\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+2x\right)}{3x} = \lim_{x\to0^-}\frac{\sin(2x)}{3x} = \frac{2}{3}\underbrace{\lim_{2x\to0^-}\frac{\sin(2x)}{2x}}_{\text{Limite notável}} = \frac{2}{3}\times1 = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+}\frac{\ln(2x-1)}{3x^2-3x} = \lim_{x\to1^+}\frac{\ln(2x-1)}{3x(x-1)} = \lim_{x\to1^+}\frac{\ln(2x-1)}{x-1}\times\lim_{x\to1^+}\frac{1}{3x} =$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{x\to1^+}\frac{\ln(2x-1)}{x-1}$$

Mudança de variável: $y=\ln(2x-1) \Leftrightarrow x=\frac{e^y+1}{2}$ $\qquad x\to1^+ \Rightarrow y\to0^+$

Assim,

$$\frac{1}{3}\lim_{x\to1^+}\frac{\ln(2x+1)}{x-1} = \frac{1}{3}\lim_{y\to0^+}\frac{y}{\frac{e^y+1}{2}-1} = \frac{1}{3}\lim_{y\to0^+}\frac{2y}{e^y-1} = \frac{2}{3}\,\frac{1}{\underbrace{\lim_{y\to0^+}\frac{e^y-1}{y}}_{\text{Limite notável}}} = \frac{2}{3}\times\frac{1}{1} = \frac{2}{3}$$

f pode ser contínua e, para tal, k tem que ser igual a $\frac{2}{3}$.

13.2. Para $x < 0$:

$f'(x) = \left(\dfrac{\sin(2x)}{3x}\right)' = \dfrac{6x\cos(2x) - 3\sin(2x)}{9x^2}$

Assim,

$$f'\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{-9\pi\cos(-3\pi) - 3\sin(-3\pi)}{\frac{81}{4}\pi^2} = \frac{9\pi \times 4}{81\pi^2} = \frac{4}{9\pi}$$

$f(2) = \dfrac{\ln 3}{6} > \dfrac{4}{9\pi}$

$f(3) = \dfrac{\ln 5}{18} < \dfrac{4}{9\pi}$

f é contínua em $[2,3]$ pois é o quociente entre funções contínuas, uma é a composta entre uma função logarítmica e uma polinomial, a outra é polinomial.

Como $f(3) < f'\left(-\dfrac{3\pi}{2}\right) < f(2)$ e f é contínua em $[2,3]$, então pelo teorema de Bolzano $\exists c \in]2,3[: f(c) = f'\left(-\dfrac{3\pi}{2}\right)$, como queríamos mostrar.