

1. Se temos 8 termos no desenvolvimento então $n = 7$.

Todos os termos do desenvolvimento de $(a + b)^n$ têm a seguinte forma:

$${}^n C_p a^{n-p} b^p$$

Logo, neste caso, ficamos com:

$${}^7 C_{7-p} (x^3)^{7-p} (e^{k-b})^p = {}^7 C_p x^{21-3p} e^{kp-bp}$$

Como sabemos que um dos termos é $70\sqrt{e^{6k}} \times x^9$ então

$$21 - 3p = 9 \Leftrightarrow p = 4$$

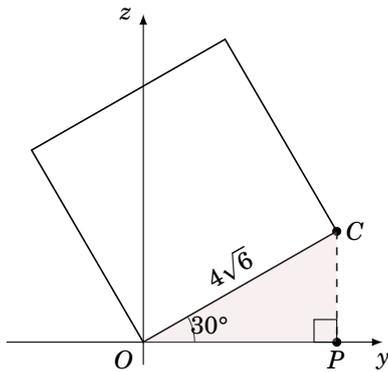
Substituindo na expressão anterior:

$$\begin{aligned} {}^7 C_4 x^9 e^{4k-4b} &= 70\sqrt{e^{6k}} \times x^9 \\ \Leftrightarrow 35e^{4k-4b} &= 70e^{3k} \\ \Leftrightarrow \frac{e^{4k-4b}}{e^{3k}} &= 2 \\ \Leftrightarrow e^{k-4b} &= 2 \\ \Leftrightarrow k - 4b &= \ln 2 \\ \Leftrightarrow k &= \ln 2 + 4b \\ \Leftrightarrow k &= \ln 2 + \ln(e^{4b}) \\ \Leftrightarrow k &= \ln(2e^{4b}) \end{aligned}$$

Opção: A

2.

2.1 Como sabemos que o ponto A tem coordenadas $(4\sqrt{6}, 0, 0)$ então $\overline{OA} = 4\sqrt{6}$. Sendo $[ABCDEFGH]$ um cubo então sabemos também que todas as arestas têm o mesmo comprimento, e por conseguinte, $\overline{OC} = 4\sqrt{6}$. Considerando o plano yOz temos:

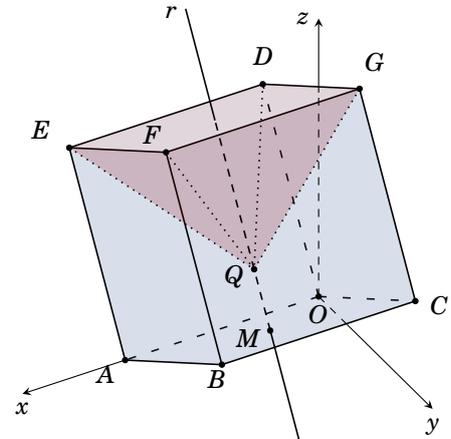


$$\begin{aligned} \sin 30^\circ &= \frac{\overline{CP}}{4\sqrt{6}} \Leftrightarrow \overline{CP} = 4\sqrt{6} \times \frac{1}{2} \Leftrightarrow \overline{CP} = 2\sqrt{6} \\ \cos 30^\circ &= \frac{\overline{OP}}{4\sqrt{6}} \Leftrightarrow \overline{OP} = 4\sqrt{6} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \\ \overline{OP} &= 2\sqrt{18} \Leftrightarrow \overline{OP} = 6\sqrt{2} \end{aligned}$$

Assim sendo, $C(0, 6\sqrt{2}, 2\sqrt{6})$.

Agora, com os pontos A e C, podemos determinar as coordenadas do ponto $M(x_M, y_M, z_M)$, uma vez que é o ponto médio do $[AC]$.

$$\begin{aligned} x_M &= \frac{4\sqrt{6} + 0}{2} = 2\sqrt{6} \\ y_M &= \frac{0 + 6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} \\ z_M &= \frac{0 + 2\sqrt{6}}{2} = \sqrt{6} \end{aligned}$$



$$M(2\sqrt{6}, 3\sqrt{2}, \sqrt{6})$$

Como sabemos que r tem a mesma direção da reta CG e a face $[OCGD]$ está no plano yOz , podemos determinar um vector diretor de r , chamemos-lhe \vec{u} , rapidamente:

$$\overrightarrow{OC} = (0, 6\sqrt{2}, 2\sqrt{6})$$

logo

$$\overrightarrow{CG} = (0, -2\sqrt{6}, 6\sqrt{2})$$

e podemos determinar um vector colinear com este multiplicando todas as coordenadas por $\frac{1}{2\sqrt{2}}$, ficando:

$$\vec{u} = \frac{1}{2\sqrt{2}} (0, -2\sqrt{6}, 6\sqrt{2}) = (0, -\sqrt{3}, 3)$$

Então uma equação da reta r pode ser a apresentada.

2.2 Seja $Q(x_Q, y_Q, z_Q)$.

Sendo paralelo a xOy , a equação do plano BQC é $z = 2\sqrt{6}$, logo, $z_Q = 2\sqrt{6}$

Recorrendo à equação da reta apresentada na alínea anterior,

$$2\sqrt{6} = \sqrt{6} + 3k \Leftrightarrow k = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

e, portanto:

$$x_Q = 2\sqrt{6} + \frac{\sqrt{6}}{3} \times 0 = 2\sqrt{6}$$

$$y_Q = 3\sqrt{2} + \frac{\sqrt{6}}{3} \times (-\sqrt{3}) = 2\sqrt{2}$$

O que permite concluir que $Q(2\sqrt{6}, 2\sqrt{2}, 2\sqrt{6})$.

3. Considerando o primeiro ponto do enunciado, temos duas situações distintas que é importante considerar.

A primeira em que ainda temos um número cujo algarismo das dezenas é o 1:

				1	7,9
				1	2

e a segunda em que já não temos o 1 como algarismo das dezenas:

				2,3,4, ...,9	1,3,5, 7,9
				8	5

Para o segundo ponto do enunciado, temos de ter em conta que a palavra “matemática” tem 6 letras distintas e que uma e só uma delas tem de aparecer na combinação, sendo um dos espaços ocupado por ela enquanto que no outro apenas podem aparecer as restantes letras (20):

		A,C,E, I,M,T	restantes
		6	20
		↔ ×2	

No terceiro ponto do enunciado apenas é pedido que o primeiro dígito seja um número primo, nada sendo imposto no segundo, temos:

2,3, 5,7	todos		
4	10		

A solução será:

$$4 \times 10 \times 6 \times 20 \times 2 \times (1 \times 2 + 8 \times 5) = 403200$$

Opção: A

4.

4.1 Sejam:

A: «A bola é preta.»

B: «A bola está numerada com um número par.»

Do enunciado sai que:

- $P(A) = 0,625$
- $P(B|A) = \frac{3}{5}$
- $P(\bar{A}|B) = \frac{1}{3}$

Queremos saber o valor de $P(\bar{B})$.

Como

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

temos

$$\begin{aligned} \frac{3}{5} &= \frac{P(B \cap A)}{0,625} \\ \Leftrightarrow \frac{3}{5} \times 0,625 &= P(B \cap A) \\ \Leftrightarrow \frac{3}{8} &= P(B \cap A) \end{aligned}$$

Sabemos também que:

$$P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B) = 1 - \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

portanto:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} &= 1 - \frac{\frac{3}{8}}{P(B)} \\ \Leftrightarrow P(B) &= \frac{\frac{3}{8}}{\frac{2}{3}} \\ \Leftrightarrow P(B) &= \frac{9}{16} \end{aligned}$$

Assim sendo:

$$P(\bar{B}) = 1 - \frac{9}{16} = 43,75\%$$

4.2 De acordo com a definição de X e Y feita no enunciado, $P(Y|X)$ é a probabilidade de as bolas com a mesma cor serem extraídas consecutivamente sabendo que isso acontece com as bolas brancas. Assim, apenas temos de considerar o que acontece com as pretas (à falta de um valor concreto para o seu número vamos considerar n) e com a azul mas também com o posicionamento dos três grupos de cores presentes na extração.

Podemos visualizar uma das situações que queremos que aconteça (casos favoráveis):



Claro que os grupos podem trocar de posição entre si e, por isso, o número de casos favoráveis é: $3! = 6$.

No entanto, podemos ter um caso assim:



Para contarmos todas as situações possíveis vamos considerar que temos n bolas pretas, 1 bola azul e 1 grupo de bolas brancas que estará sempre junto, o que perfaz um total de $n + 2$ elementos/espacos. Vamos começar por colocar todas as bolas pretas - n - nos $n + 2$ espacos:

$${}^{n+2}C_n = \frac{(n+2)!}{n!(n+2-n)!} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

Isto terá de ser multiplicado pelas trocas entre a bola azul e o grupo de bolas brancas, assim:

$$\frac{(n+2)(n+1)}{2} \times 2 = (n+2)(n+1)$$

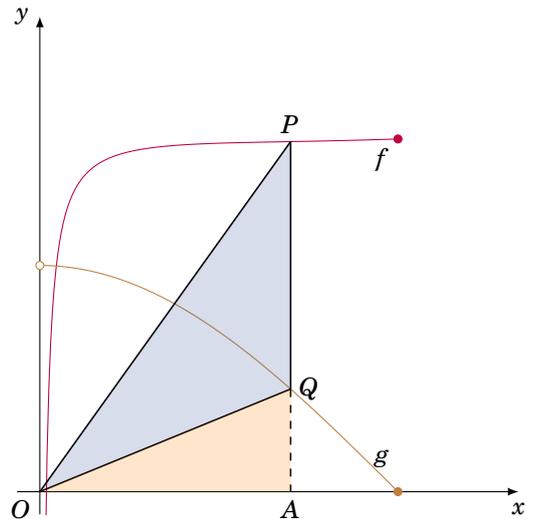
Assim sendo:

$$\begin{aligned} \frac{6}{(n+2)(n+1)} &= \frac{1}{22} \\ \Leftrightarrow 132 &= n^2 + 3n + 2 \\ \Leftrightarrow n^2 + 3n - 130 &= 0 \end{aligned} \left. \begin{array}{l} \text{Usando a fórmula} \\ \text{resolvente} \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{n = 10} \vee n = -13 \notin \mathbb{N}$$

Temos $10 + 5 + 1 = 16$ bolas dentro da caixa.

5. Vamos considerar o seguinte:



A área do triângulo $[OPQ]$, pode definir-se como a diferença entre as áreas dos triângulos $[OAP]$ e $[OAQ]$.

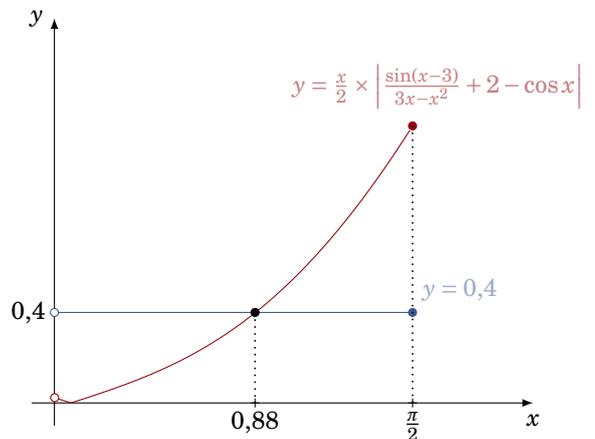
Assim, queremos saber para que a se tem:

$$\left| \frac{a \times \left(\frac{\sin(a-3)}{3a-a^2} + 2 \right)}{2} - \frac{a \times \cos a}{2} \right| = 0,4$$

$A_{[OAP]} \qquad A_{[OAQ]}$

ou, se quisermos:

$$\frac{a}{2} \times \left| \frac{\sin(a-3)}{3a-a^2} + 2 - \cos a \right| = 0,4$$



Assim, depois de fazermos a representação na calculadora das funções $y = \frac{x}{2} \times \left| \frac{\sin(x-3)}{3x-x^2} + 2 - \cos x \right|$ e $y = 0,4$, conseguimos verificar que se interseam quando $x \approx 0,88$, ou seja, $a \approx 0,88$.

6. Sabendo que (u_n) é progressão aritmética, podemos escrever já que:

$$u_n = u_k + (n - k)r$$

e

$$S = \frac{u_n - u_k}{2} \times (n - k + 1)$$

A partir daqui e com a informação que nos é dada no segundo ponto do enunciado, temos:

$$\begin{aligned} u_3 + u_4 + \dots + u_{12} &= 35 \\ \Leftrightarrow \frac{u_3 + u_{12}}{2} \times (12 - 3 + 1) &= 35 && \left. \begin{array}{l} \text{Usando a fórmula in-} \\ \text{dicada anteriormente} \\ \text{Considere-se } r_1 \text{ a ra-} \\ \text{zão da p.a. } (u_n) \end{array} \right\} \\ \Leftrightarrow \frac{u_7 - 4r_1 + u_8 + 4r_1}{2} \times 10 &= 35 \\ \Leftrightarrow (u_7 - 4r_1 + u_8 + 4r_1) \times 5 &= 35 \\ \Leftrightarrow u_7 + u_8 &= 7 \\ \Leftrightarrow u_8 &= 7 - u_7 \end{aligned}$$

Sendo assim, usando o primeiro ponto do enunciado:

$$\begin{aligned} u_8 - 1 &= (u_7)^2 \\ \Leftrightarrow 7 - u_7 - 1 &= (u_7)^2 \\ \Leftrightarrow (u_7)^2 + u_7 - 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow u_7 = -3 \quad \vee \quad u_7 = 2 & \left. \begin{array}{l} \text{Usando a fórmula} \\ \text{resolvente.} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Vamos analisar cada um destes valores de u_7 :

i) Se $u_7 = -3$ então $u_8 = 7 + 3 = 10$ e, conseqüentemente, o valor de $r_1 = r_8 - r_7 = 13$. Podemos, com isto, determinar o valor de $u_9 = 10 + 13 = 23$.

Sendo u_7 e u_9 os dois primeiros termos de (v_n) , progressão geométrica, a sua razão pode calcular-se a partir da divisão destes termos que, como têm sinais contrários, será negativa e impossibilita a monotonia da sucessão (v_n) .

ii) Se $u_7 = 2$ então $u_8 = 7 - 2 = 5$ e a razão é $r_1 = 3$. Assim sendo, $u_9 = 5 + 3 = 8$. Pelo facto de (v_n) ser decrescente conseguimos dizer que $v_1 = u_9 = 8$ e que $v_2 = u_7 = 2$. A razão desta progressão geométrica é

$$r_2 = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 2^{-2}.$$

Como (v_n) é uma progressão geométrica,

$$v_n = v_k \times r^{n-k}$$

O que, substituindo adequadamente, fica:

$$v_n = 8 \times (2^{-2})^{n-1} = 2^3 \times 2^{-2n+2} = 2^{5-2n}$$

7. Temos:

$$\text{Arg}(z_1) = \frac{\pi}{24} \quad \text{Arg}(z_2) = \frac{13\pi}{24}$$

assim,

$$\text{Arg}(z_2) - \text{Arg}(z_1) = \frac{13\pi}{24} - \frac{\pi}{24} = \frac{\pi}{2}$$

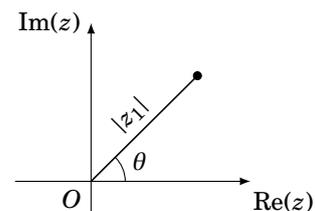
Com isto podemos descartar as opções (A), (B) e (D):

- descartamos (A) pois nesse caso teríamos um quadrado e os afixos seriam vértices consecutivos contrariando o enunciado;
- descartamos (B) e (D) pois no caso de um hexágono e de um decágono não encontramos vértices que resultem da rotação centrada na origem e ângulo $\frac{\pi}{2}$ de outro vértice.

Opção: C

8. Em primeiro lugar vamos simplificar os números z_1 e z_2 presentes na expressão.

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{i^{3-4k} + 3 + 2i}{2 - i} \\ &= \frac{i^3 \times (i^4)^{-k} + 3 + 2i}{2 - i} \\ &= \frac{-i \times 1 + 3 + 2i}{2 - i} && \left. \begin{array}{l} \text{Como } i^3 = -i \text{ e } i^4 = 1 \end{array} \right\} \\ &= \frac{3 + i}{2 - i} \\ &= \frac{3 + i}{2 - i} \times \frac{2 + i}{2 + i} && \left. \begin{array}{l} \text{Seguindo as regras da divisão de} \\ \text{complexos escritos na forma algé-} \\ \text{brica.} \end{array} \right\} \\ &= \frac{(3 + i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} \\ &= \frac{6 + 3i + 2i - 1}{2^2 + 1} = \frac{5 + 5i}{5} = 1 + i \end{aligned}$$



Passando agora z_1 para a forma trigonométrica:

$$|z_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Seja θ um argumento de z_1 , então

$$\tan \theta = \frac{1}{1} \wedge \theta \in 1^\circ\text{Q}.$$

Logo,

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

e assim, podemos escolher $k = 0$, ficando $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Concluimos, portanto, que

$$z_1 = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4})}.$$

Analisemos agora o número z_2 .

$$\begin{aligned} z_2 &= \cos\left(\frac{9\pi}{8}\right) + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)}{i} \\ &= \cos\left(\frac{9\pi}{8}\right) + \frac{1}{i} \times \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \\ &= \cos\left(\frac{9\pi}{8}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \\ &= \cos\left(\frac{9\pi}{8}\right) + i \sin\left(\pi + \frac{\pi}{8}\right) \\ &= \cos\left(\frac{9\pi}{8}\right) + i \sin\left(\frac{9\pi}{8}\right) \\ &= e^{i(\frac{9\pi}{8})} \end{aligned}$$

*Como $\frac{1}{i} = -i$
Sendo que $-\sin(\alpha) = +\sin(\pi + \alpha)$
podemos escrever*

Agora,

$$\overline{z_2}^2 = \left(e^{i(-\frac{9\pi}{8})}\right)^2 = e^{i(-\frac{9\pi}{4})}$$

mas, tendo em conta que:

$$-\frac{9\pi}{4} = -2\pi - \frac{\pi}{4}$$

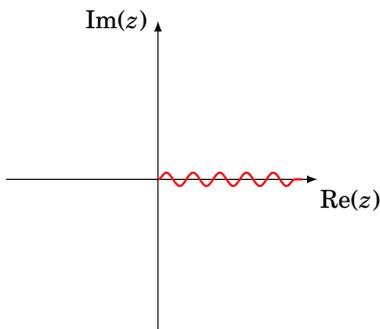
então, podemos simplificar para:

$$\overline{z_2}^2 = e^{i(-\frac{\pi}{4})}$$

Assim sendo,

$$\frac{(z_1)^n}{(\overline{z_2}^2)^n} = \frac{(\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4})})^n}{e^{i(-\frac{\pi}{4})}} = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4}n + \frac{\pi}{4})}$$

Para o número ser real positivo, o argumento tem de ser da forma: $0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.



Por isso

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4}n + \frac{\pi}{4} &= 0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \pi n + \pi &= 8k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ n + 1 &= 8k, k \in \mathbb{Z} \\ n &= 8k - 1, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

*Colocamos os mesmos denominadores.
Dividimos tudo por π .*

O menor valor de n obtém-se quando $k = 1$:

$$n = 8 - 1 = 7.$$

9. Manipulando a expressão da circunferência

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + y^2 - 8y + 13 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 - 8y + 4^2 - 4^2 + 13 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-4)^2 &= 2^2 \end{aligned}$$

conseguimos determinar o seu centro $(-1,4)$ e o raio $r = 2$.

Como BC é paralela ao eixo Ox e sabemos que os ângulos internos de um triângulo equilátero têm 60° de amplitude, o declive $-m$ da reta AB é: $m = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$

O declive $-m'$ da mediatriz é: $m' = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Num triângulo equilátero o incentro e o circuncentro coincidem e, por isso, sabemos que a mediatriz contém o centro da circunferência representada. Sendo assim:

$$\begin{aligned} y - 4 &= -\frac{\sqrt{3}}{3}(x + 1) \Leftrightarrow 3y - 12 = -\sqrt{3}x + \sqrt{3} \\ \Leftrightarrow 3y + \sqrt{3}x &= 12 + \sqrt{3} \end{aligned}$$

Opção: C

10. Começamos por calcular o valor de $\lim \left[n \cdot \ln \left(\frac{n+4}{n+2} \right) \right]$

$$\lim \left[n \cdot \ln \left(\frac{n+4}{n+2} \right) \right] = \lim \left[\ln \left(\frac{n(1 + \frac{4}{n})}{n(1 + \frac{2}{n})} \right)^n \right]$$

$$= \ln \left[\frac{\lim \left[\left(1 + \frac{4}{n} \right)^n \right]}{\lim \left[\left(1 + \frac{2}{n} \right)^n \right]} \right]$$

$$= \ln \frac{e^4}{e^2} = \ln e^2 = 2$$

Então o limite $\lim f(u_n)$ é equivalente a $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$.

Observando o gráfico, vemos que, à medida que o x toma valores próximos mas inferiores a 2, os valores de $f(x)$ tendem para $+\infty$.

Opção: B

11. Se queremos que a função g seja contínua no ponto $x = -2$ então queremos que

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} g(x) = g(-2)$$

Comecemos por resolver o limite onde não encontramos o a nem o b .

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{e^{x+2} + x + 1}{x + 2} \left(\frac{0}{0}\right) \stackrel{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{e^{x+2} + x + 1 - 0}{x - (-2)} = f'(-2) = 2$$

Considerando que

$$f(x) = e^{x+2} + x + 1$$

f é derivável no seu domínio e o limite é igual a

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)}$$

Podemos então concluir que este se resume a $f'(-2)$.

$$f'(x) = e^{x+2} + 1 \Rightarrow f'(-2) = e^0 + 1 = 2$$

Como o limite calculado tem de ser igual ao valor de $g(-2)$ então sabemos já que $a = 2$ (descartamos as opções (C) e (D)).

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \left(b + \frac{\ln(x+3)}{x+2} \right) = b + \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{\ln(x+3) - 0}{x - (-2)} \\ \rightarrow = b + h'(-2) = b + 1$$

Considerando que

$$h(x) = \ln(x+3)$$

h é derivável no seu domínio e o limite é igual a

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{h(x) - h(-2)}{x - (-2)}$$

Podemos então concluir que este se resume a $h'(-2)$.

$$h'(x) = \frac{1}{x+3} \Rightarrow h'(-2) = \frac{1}{-2+3} = 1$$

Também este limite tem de ser igual a 2 e, portanto, $b = 1$.

Opção: **B**

12. De sabermos que $y = -3x + 2$ é assíntota do gráfico de g e que $D_g = \mathbb{R}^+$, sabemos também que:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = -3$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - (-3x)] = 2$

Então:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(g(x))^2 + 3g(x)}{\ln x - g(x)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)(g(x) + 3x)}{\ln x - g(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{g(x)}{x} (g(x) + 3x)}{\frac{\ln x}{x} - \frac{g(x)}{x}} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - (-3x)]}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}} \\ &= \frac{-3 \cdot 2}{\text{Limite notável } = 0 - (-3)} \\ &= \frac{-3 \cdot 2}{3} = -2 \end{aligned}$$

Opção: **B**

13.

$$\begin{aligned} 13.1 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - \sqrt{x}} \left(\frac{0}{0}\right) &\stackrel{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \cdot \frac{x - 1}{x - \sqrt{x}} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x - \sqrt{x}} \quad (x + \sqrt{x}) \\ &= f'(1) \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + \sqrt{x})}{x^2 - x} \\ &= f'(1) \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + \sqrt{x})}{(x - 1)x} \\ &= f'(1) \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + \sqrt{x}}{x} \end{aligned}$$

Como

- $f'(1) = (1 + 1)^2 e^{2 \cdot 1 + 1} = 4e^3$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + \sqrt{x}}{x} = \frac{1 + 1}{1} = 2$

temos:

$$\begin{aligned} &= 4e^3 \cdot 2 \\ &= 8e^3 \end{aligned}$$

Opção: **D**

13.2 O declive da reta tangente à função para $x = a$ é dado por $f'(a)$. Se queremos saber o declive máximo no intervalo $]-\infty, -1]$ então queremos saber onde $f'(x)$ atinge o seu máximo nesse intervalo. Para isso vamos analisar $f''(x)$.

$$\begin{aligned} f''(x) &= ((x+1)^2 e^{2x+1})' \\ &= ((x+1)^2)' e^{2x+1} + (x+1)^2 (e^{2x+1})' \\ &= 2(x+1)e^{2x+1} + 2(x+1)^2 e^{2x+1} \\ &= 2e^{2x+1}(x+1)(x+2) \end{aligned}$$

Calculamos agora os seus zeros:

$$2e^{2x+1}(x+1)(x+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{2e^{2x+1} = 0}_{\text{Impossível em } \mathbb{R}} \vee x+1 = 0 \vee x+2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = -2$$

x	$-\infty$	-2		-1
$2e^{2x+1}$	+	+	+	+
$x+1$	-	-	-	0
$x+2$	-	0	+	+
$f''(x)$	+	0	-	0
$f'(x)$		máx. $f'(-2)$		min. $f'(-1)$

Assim sendo, o declive máximo no intervalo pedido é igual a $f'(-2)$ ou seja:

$$f'(-2) = (-2+1)^2 e^{2(-2)+1} = e^{-3}$$

Item extra: $\ln((x+1)^2 e^{2x+1}) - 1 \geq \ln(3x^2 + x) + 2x$

Começamos com a determinação do domínio em que esta desigualdade é válida:

$$D = \{x \in \mathbb{R} : (x+1)^2 e^{2x+1} > 0 \vee 3x^2 + x > 0\}$$

Para verificarmos a primeira condição

$$(x+1)^2 e^{2x+1} > 0$$

basta que $x \neq -1$, ou seja, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

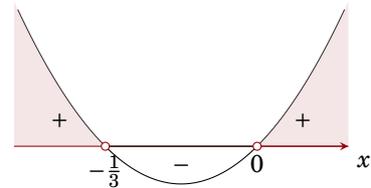
Para a segunda, temos uma inequação de segundo grau:

$$3x^2 + x > 0$$

Calculamos os zeros:

$$\begin{aligned} 3x^2 + x &= 0 \\ \Leftrightarrow x(3x+1) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 0 \vee x &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Fazemos o esboço da parábola:



Como queremos que seja positiva, ficamos com:

$$\left] -\infty, -\frac{1}{3} \right[\cup] 0, +\infty[$$

Assim, o domínio onde vamos trabalhar é

$$\begin{aligned} D &= \mathbb{R} \setminus \{-1\} \cap \left(\left] -\infty, -\frac{1}{3} \right[\cup] 0, +\infty[\right) \\ &= \left] -\infty, -\frac{1}{3} \right[\cup] 0, +\infty[\setminus \{-1\} \end{aligned}$$

Então, em D temos:

$$\ln((x+1)^2 e^{2x+1}) - 1 \geq \ln(3x^2 + x) + 2x$$

$$\Leftrightarrow \ln((x+1)^2 e^{2x+1}) \geq \ln(3x^2 + x) + 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow \ln((x+1)^2 e^{2x+1}) \geq \ln(3x^2 + x) + \ln(e^{2x+1})$$

$$\Leftrightarrow \ln((x+1)^2 e^{2x+1}) \geq \ln[(3x^2 + x)(e^{2x+1})]$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 e^{2x+1} \geq (3x^2 + x)(e^{2x+1})$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 e^{2x+1} - (3x^2 + x)(e^{2x+1}) \geq 0$$

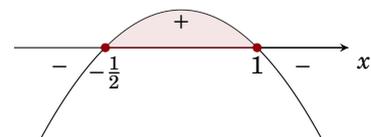
$$\Leftrightarrow \underbrace{e^{2x+1}}_{> 0 \forall x \in D} [(x+1)^2 - (3x^2 + x)] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 - 3x^2 - x \geq 0$$

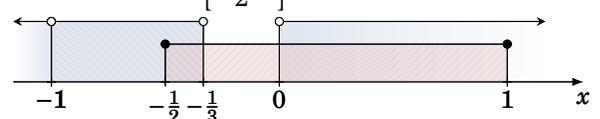
$$\Leftrightarrow -2x^2 + x + 1 \geq 0$$

Mais uma vez temos uma inequação de segundo grau, cujos zeros podemos calcular usando a fórmula resolvente e são: $-\frac{1}{2}$ e 1 .

Desta vez a parábola está voltada para baixo:



A solução é: $D \cap \left[-\frac{1}{2}, 1 \right]$



Ou seja:

$$S = \left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3} \right[\cup] 0, 1].$$

14.

14.1 Para os casos em que o ponto não pertence ao domínio, a existência de limite da função em a apenas prevê que

$$\lim_{x \rightarrow a^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x)$$

Assim, neste caso, queremos verificar se:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$$

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x (1 - \cos x)}{x^3} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x (1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^3(1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x (1 - \cos^2 x)}{x^3(1 + \cos x)} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Pela fórmula funda-} \\ \text{mental da trigonome-} \\ \text{tria.} \end{array} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x \sin^2 x}{x^3(1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\sin^3 x}{x^3} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} \right) \\ &= \left(\underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x}}_{\substack{\text{limite notável} \\ =1}} \right)^3 \cdot \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 + \cos x}}_{\frac{1}{2}} \\ &= 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0^+} (x e^{\frac{2}{x}}) \stackrel{(0 \cdot \infty)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{2}{x}}}{\frac{1}{x}} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{2}{x}}}{\frac{2}{x}} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Se } x \rightarrow 0^+ \text{ então} \\ \frac{2}{x} \rightarrow +\infty. \text{ Seja } y = \frac{2}{x}, \\ y \rightarrow +\infty \end{array} \right\} \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y} \\ & \quad \left. \begin{array}{l} \text{limite} \\ \text{notável=} \\ +\infty \end{array} \right\} \\ &= 2 \cdot +\infty = +\infty \end{aligned}$$

Com isto, concluímos que não existe $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.

14.2 Vamos começar por ver qual a expressão da função f apresentada no enunciado.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 \cdot g(x) \\ &= \begin{cases} x^3 \frac{\sin x (1 - \cos x)}{x^3} & \text{se } -\pi \leq x < 0 \\ x^3 \cdot x e^{\frac{2}{x}} & \text{se } x > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \sin x (1 - \cos x) & \text{se } -\pi \leq x < 0 \\ x^4 \cdot e^{\frac{2}{x}} & \text{se } x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Para estudar a sua monotonia e existência de extremos relativos vamos analisar f' .

Para $x \in [-\pi, 0[$:

$$\begin{aligned} (\sin x (1 - \cos x))' &= (\sin x)' (1 - \cos x) + \sin x (1 - \cos x)' \\ &= \cos x (1 - \cos x) + \sin x \cdot \sin x \\ &= \cos x - \cos^2 x + \sin^2 x \\ &= \cos x - \cos^2 x + 1 - \cos^2 x \\ &= -2 \cos^2 x + \cos x + 1 \end{aligned}$$

já quando $x \in]0, +\infty[$:

$$\begin{aligned} (x^4 e^{\frac{2}{x}})' &= (x^4)' e^{\frac{2}{x}} + x^4 (e^{\frac{2}{x}})' \\ &= 4x^3 e^{\frac{2}{x}} + x^4 \left(-\frac{2}{x^2} e^{\frac{2}{x}} \right) \\ &= 4x^3 e^{\frac{2}{x}} - 2x^2 e^{\frac{2}{x}} \\ &= 2x^2 e^{\frac{2}{x}} (2x - 1) \end{aligned}$$

e, portanto:

$$f'(x) = \begin{cases} -2 \cos^2 x + \cos x + 1 & \text{se } -\pi \leq x < 0 \\ 2x^2 e^{\frac{2}{x}} (2x - 1) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Vejamos agora para que valores $f'(x) = 0$.

Quando $x \in [-\pi, 0[$:

$$\begin{aligned} -2 \cos^2 x + \cos x + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos x &= 1 \vee \cos x = -\frac{1}{2} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Usando a fórmula} \\ \text{resolvente.} \end{array} \right\} \\ \Leftrightarrow \cos x &= 0 + 2k\pi \vee x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \vee x &= -\pi + \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow \cos x &= 2k\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

De todas as soluções, a que pertence ao intervalo onde estamos a trabalhar é: $-\frac{2\pi}{3}$.

Se $x \in]0, +\infty[$:

$$2x^2 e^{\frac{2}{x}} (2x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 e^{\frac{2}{x}} = 0 \vee 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 = 0 \vee \underbrace{e^{\frac{2}{x}} = 0}_{\text{Impossível em } \mathbb{R}} \vee 2x - 1 = 0$$

Impossível
em \mathbb{R}

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{1}{2}$$

Neste intervalo, temos de considerar a solução $\frac{1}{2}$.

x	$-\pi$		$-\frac{2\pi}{3}$		0		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
f'	-	-	0	+		-	0	+
f	máx.	↘	min.	↗		↘	min.	↗

Assim, podemos dizer que

- f é decrescente em $\left[-\pi, -\frac{2\pi}{3}\right]$ e em $\left]0, \frac{1}{2}\right]$.
- f é crescente em $\left[-\frac{2\pi}{3}, 0\right]$ e em $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$.
- f tem um máximo relativo quando $x = -\pi$.
- f tem mínimos relativos quando $x = -\frac{2\pi}{3}$ e quando $x = \frac{1}{2}$.