OmegaMat

Exame Modelo VII de Matemática A

Duração do Exame: 150 **minutos** + 30 **minutos de tolerância** | **junho de 2020**

12.º Ano de Escolaridade

Utiliza apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta

É permitido o uso de calculadora

Não é permitido o uso de corretor. Risca o que pretendes que não seja classificado

Para cada resposta identifica o item

Apresenta as tuas respostas de forma legível

Apresenta apenas uma resposta para cada item

A prova apresenta um formulário na página 2

As cotações dos itens encontram-se na página 7

Na resposta aos itens de seleção (escolha múltipla), seleciona a resposta correta. Escreve na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresenta o teu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiveres de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida aproximação apresenta sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr *(α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)*

área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

área de um setor circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ *(α- amplitude, em radianos, do ângulo ao centro, r - raio)*

área lateral de um cone: $\pi r g$ *(r - raio da base, g - geratriz)*

área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ *(r - raio)*

Volume da pirâmide: $\frac{1}{3}\times$ *área da base* $\times$ *Altura*

Volume do cone: $\frac{1}{3}\times$ *área da base* $\times$ *Altura*

Volume da esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ *(r - raio)*

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$, $r \neq 1$

Trigonometria

$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

Complexos

$(|z| e^{i\theta})^n = |z|^n e^{i(n\theta)}$

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} e^{i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)}$, $k \in \{0; 1; 2; ...; n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u^n)' = n u^{n-1} u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' e^u$

$(a^u)' = u' a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

1. Seja E, conjunto finito e não vazio, o espaço amostral de uma experiência aleatória, seja $P(E)$ o espaço dos acontecimentos, sendo equiprováveis os acontecimentos elementares, P uma probabilidade em $P(E)$ e sejam A e B dois acontecimentos possíveis, associados a essa experiência aleatória

   Sabe-se que $P(A) = 0.2$, $P\left(A \cap \overline{B}\right) = 0.1$ e $P(A \cup B) = p, p > 0.2$

   Em qual das opções está o valor de p de modo que $P(B \mid \overline{A}) = \dfrac{5}{8}$

   (A) 0.6
   (B) 0.7
   (C) 0.5
   (D) 0.4

2. Seja $\mathbb{C}$, o conjunto dos números complexos

2.1. Seja $z \in \mathbb{C}$

Em qual das opções podem estar representados, no plano D´Argand - Gauss, os afixos dos números complexos que são solução da equação $z^4 - z = 0$?

(A)

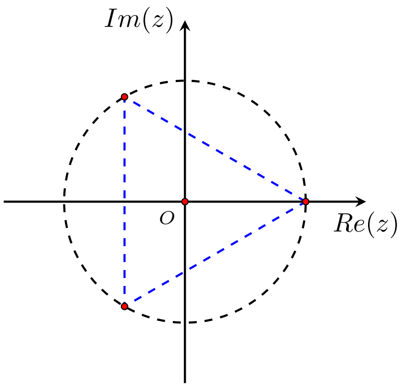

Figura 1

(B)

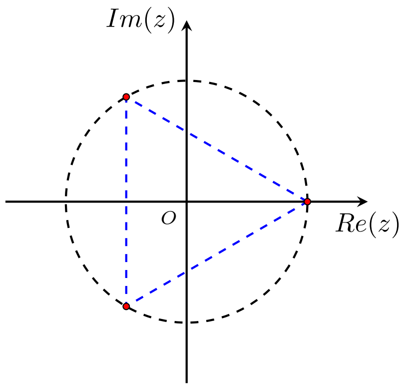

Figura 2

(C)

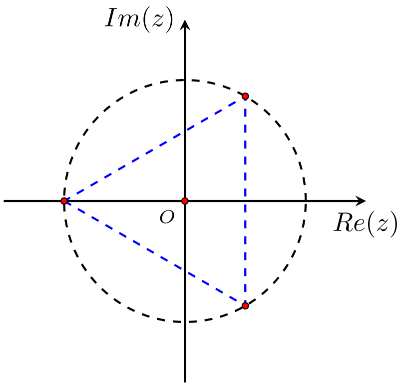

Figura 3

(D)

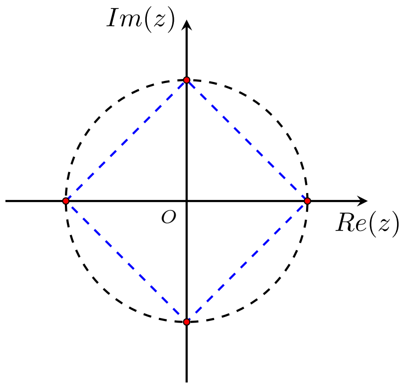

Figura 4

2.2. Considera o número complexo unitário $z = e^{i\theta}$, com $\theta \in]0; \pi]$

Sendo $w = z - 1$, mostra que: $Arg(w) = \dfrac{\pi + \theta}{2}$ e $|w| = 2\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$

3. Seja f, a função, real de variável real, definida por $f(x) = e^{2x} - 2e^{x}$

   3.1. Resolve, em $\mathbb{R}$, a equação $f(x) = -1$

   3.2. Mostra que a função g, real de variável real, definida por $g(x) = f(x) - 1$, tem pelo um zero no intervalo $]0;1[$

4. Seja f, a função real de variável real, definida por, $f(x) = \begin{cases} \sin(x) + \dfrac{x}{2} & se \quad 0 \leq x < \pi \\ \ln\left(e^{k}\right) + 2k + \pi & se \quad x = \pi \\ \dfrac{e^{x-\pi} - 1}{x - \pi} - 1 + \dfrac{\pi}{2} & se \quad x > \pi \end{cases}$, com $k \in \mathbb{R}$

   4.1. Numa das opções está o valor de $\displaystyle\lim_{x \to 0^{+}} \frac{f(x)}{2x + \ln(x+1)}$

   Em qual delas?

   (A) $\dfrac{3}{2}$ (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) $\dfrac{1}{4}$ (D) $\dfrac{3}{4}$

   4.2. Averigua, analiticamente, se existe algum $k \in \mathbb{R}$, para o qual a função f é contínua no ponto $x = \pi$

   4.3. Estuda, quanto à monotonia, a função f, no intervalo $[0;\pi[$

   4.4. No referencial cartesiano o.n. da figura 5, está, a representação gráfica da função g, restrição da função f ao intervalo $[0;\pi[$, parte do gráfico da função h, definida por $h(x) = \dfrac{x}{2}$, e um triângulo $[ABC]$

   Considera que um ponto A se desloca ao longo do gráfico da função g, nunca coincidindo com o ponto C nem com a origem O do referencial

   Para cada posição do ponto A, seja x a sua abcissa

   Sabe-se que o ponto B tem a mesma abcissa do ponto A

   Recorrendo às potencialidades da calculadora gráfica, determina o valor de x para o qual a área do triângulo $[ABC]$ é máxima

   Na tua resolução deves:
   Apresentar o gráfico que utilizaste para resolver o problema, e assinalar os pontos relevantes
   Apresentar o valor de x arredondado às centésimas

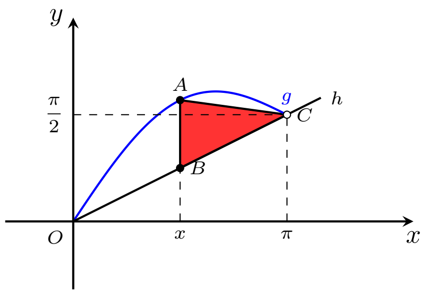

Figura 5

5. Uma prateleira está dividida em dezasseis compartimentos iguais. Em cada compartimento só se pode colocar um objeto

   Pretende-se encher a prateleira com dezasseis bolas, sendo sete brancas, quatro azuis, numeradas de um a quatro, e cinco vermelhas, numeradas de um a cinco. As bolas de cor branca não se distinguem
   Mostra que existem 4151347200 maneiras diferentes de as bolas ficarem colocadas na prateleira

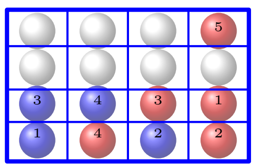

Figura 6

6. Numa caixa há dezassete bolas, sendo oito azuis, numeradas com o número dois, quatro vermelhas, numeradas com o número três, três brancas, numeradas com o número quatro e duas pretas, numeradas com o número um

   Retiram-se, de uma só vez, duas bolas da caixa e multiplicam-se os números das bolas

   Qual é a probabilidade de o produto dos números das bolas ser igual quatro?

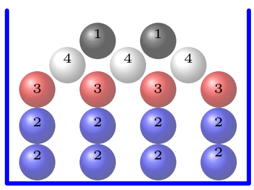

Figura 7

7. Seja f, a função definida em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, por $f(x) = \dfrac{-x^2+2}{x-1}$

Na figura 8, encontra-se representado, em referencial ortonormado xOy, parte do gráfico da função f, e duas retas, assintotas ao gráfico da função f
A assíntota oblíqua está identificada por r

Em qual das opções está a equação reduzida da reta r?

(A) $y = -x + 1$

(B) $y = -2x - 2$

(C) $y = -3x - 2$

(D) $y = -x - 1$

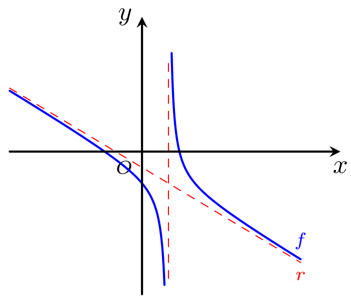

Figura 8

8. Na figura 9, está representada uma pirâmide de base retangular e reta, $[ABCDV]$

Sabe-se que:

- o vértice A, da base da pirâmide, tem coordenadas $(0,2;0)$
- uma equação vetorial da reta r, que contém a altura da pirâmide é $(x;y;z) = (2;-2;-2) + k(0;2;2), k \in \mathbb{R}$
- Uma equação cartesiana do plano ABV é $-3x+y+z-2=0$

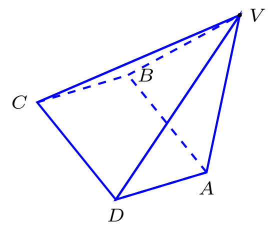

Figura 9

8.1. Determina a altura da pirâmide
Sugestão: Começa por escrever uma equação cartesiana do plano que contém a base da pirâmide

8.2. Seja α, o plano de equação cartesiana $(2\lambda^2 - 1)x + 2\lambda^2 y + z + 4 = 0$, com $\lambda \in \mathbb{R}$
Determina o(s) valor(es) de λ, para os quais os planos ABV e α são perpendiculares

9. Considera o desenvolvimento de $\left(2x - \dfrac{1}{2y}\right)^8$, sendo, $x \neq 0$ e $y \neq 0$

Em qual das opções está o termo da forma ax^4y^{-4}, com $a \in \mathbb{R}$, do desenvolvimento?

(A) $70x^4y^{-4}$
(B) $-70x^4y^{-4}$
(C) $28x^5y^{-3}$
(D) $-28x^5y^{-3}$

10. Numa caixa, identificada por X, há seis bolas numeradas: uma com o número um, duas com o número dois, duas com o número quatro e uma com o número seis. Numa outra caixa, identificada por Y, há dez bolas numeradas: quatro com o número dois, três com o número quatro, duas com o número seis e uma com o número sete

Considera a experiência aleatória que consiste no seguinte:

Retiram-se, ao acaso, duas bolas da caixa X e colocam-se na caixa Y. De seguida, retiram-se três bolas da caixa Y e multiplicam-se os respetivos números

Qual é a probabilidade de o produto dos números das bolas retiradas da caixa Y ser um número par?

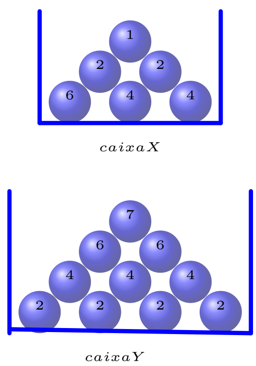

Figura 10

11. Seja f uma função real de variável real, duas vezes diferenciável num intervalo $I =]a;b[$, e seja $c \in]a;b[$

Sabe-se que $f'(c) = 0$ e $f''(c) > 0$

Pode-se afirmar que:

(A) a função tem um máximo relativo para $x = c$

(B) a função tem um mínimo relativo para $x = c$

(C) a função não está definida em $x = c$

(D) a função não tem mínimo relativo nem máximo relativo para $x = c$

12. A atividade F, de qualquer substância radioativa, é dada, numa certa unidade de medida, pela expressão $F(t) = A \times e^{-Bt}$, sendo A e B constantes reais positivas e t é o tempo em horas, com $t \geq 0$

Designe-se por F' a função derivada de F

Pode-se afirmar que:

(A) $\dfrac{F(t)}{F'(t)} = \dfrac{1}{B}$

(B) $\dfrac{F(t)}{F'(t)} = -\dfrac{1}{B}$

(C) $\dfrac{F(t)}{F'(t)} = -B$

(D) $\dfrac{F(t)}{F'(t)} = -1$

13. Na figura 11 está representado, em referencial ortonormado xOy, parte do gráfico de uma função f, real de variável real, de domínio $\mathbb{R}$ e contínua em $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

Considera a sucessão (a_n), de termo geral $a_n = 2 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

Em qual das opções está o valor de $\ln\left[e^{\lim f(a_n)}\right]$?

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) $+\infty$

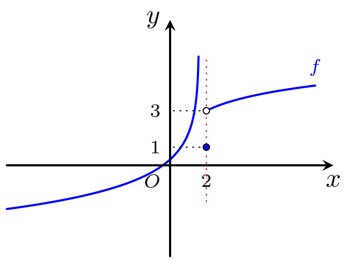

Figura 11

14. Seja f, a função real de variável real, definida em $\mathbb{R}^+$, por $f(x) = \dfrac{1 - \ln(x)}{e^{-x}}$

Na figura 12, está representado, em referencial ortonormado xOy, parte do gráfico da função f, a reta t, tangente ao gráfico no ponto A, a reta s, de equação $y = -e$, e um trapézio retângulo $[ABCO]$

Sabe-se que:

- A, é o ponto onde o gráfico de f interseta o eixo das abcissas
- B, é o ponto de interseção das retas t e s
- $C(0; -e)$

Mostra que a área do trapézio $[ABCO]$ é igual a $A_{[ABCO]} = e^2 + \dfrac{1}{2}e^{3-e}$

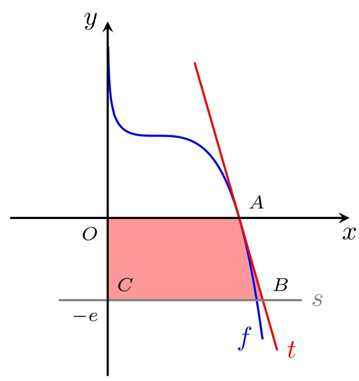

Figura 12

COTAÇÕES

1.		
	....	5 pontos
2.		
	2.1	5 pontos
	2.2	15 pontos
3.		
	3.1	10 pontos
	3.2	15 pontos
4.		
	4.1	5 pontos
	4.2	15 pontos
	4.3	15 pontos
	4.4	15 pontos
5.		
	....	10 pontos
6.		
	....	10 pontos
7.		
	....	5 pontos
8.		
	8.1	15 pontos
	8.2	10 pontos
9.		
	....	5 pontos
10.		
	....	10 pontos
11.		
	....	5 pontos
12.		
	....	5 pontos
13.		
	....	5 pontos
14.		
	....	20 pontos
	TOTAL	**100 pontos**

PÁGINA EM BRANCO