Resolução do Exame Modelo VII de Matemática A

Duração do Exame: 150 **minutos** + 30 **minutos de tolerância** | **junho de 2020**

12.º Ano de Escolaridade

1. .

$P\left(A \cap \overline{B}\right) = 0.1 \Leftrightarrow P(A) - P(A \cap B) = 0.1 \Leftrightarrow 0.2 - P(A \cap B) = 0.1 \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0.2 - 0.1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A \cap B) = 0.1$

$P(A \cup B) = p \Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = p \Leftrightarrow 0.2 + P(B) - 0.1 = p \Leftrightarrow P(B) = p - 0.1$

Assim,

$$P(B \mid \overline{A}) = \frac{5}{8} \Leftrightarrow \frac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{5}{8} \Leftrightarrow \frac{P(B) - P(B \cap A)}{0.8} = \frac{5}{8} \Leftrightarrow \frac{p - 0.1 - 0.1}{0.8} = \frac{5}{8} \Leftrightarrow \frac{p - 0.2}{0.8} = \frac{5}{8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p - 0.2 = 0.8 \times \frac{5}{8} \Leftrightarrow p - 0.2 = 0.5 \Leftrightarrow p = 0.5 + 0.2 \Leftrightarrow p = 0.7$$

Resposta: (B)

2. .

2.1. Comecemos por resolver a equação $z^4 - z = 0$

$$z^4 - z = 0 \Leftrightarrow z(z^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \vee z^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow z = 0 \vee z = \sqrt[3]{1} \Leftrightarrow z = 0 \vee z = \sqrt[3]{e^{i(0)}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = 0 \vee z = e^{i\left(\frac{0+k2\pi}{3}\right)}, k \in \{0; 1; 2\} \Leftrightarrow z = 0 \vee z = e^{i\left(\frac{k2\pi}{3}\right)}, k \in \{0; 1; 2\}$$

Atribuindo valores a k, obtemos as soluções: $z = 0 \vee z = e^{i(0)} \vee z = e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)} \vee z = e^{i\left(\frac{4\pi}{3}\right)}$

Os afixos destes complexos situam-se, no plano de Argand - Gauss, um na origem do referencial, e os outros três, sobre uma circunferência centrada na origem do referencial e de raio um

Resposta: (A)

2.2. .

$z = e^{i\theta}$, com $\theta \in]0; \pi]$

Ora,

$$w = z - 1 = e^{i\theta} - 1 = \cos(\theta) + i\sin(\theta) - 1 =$$
$$= \cos(\theta) - 1 + i\sin(\theta) =$$
$$= -2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + 2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Cálculo auxiliar:

$$\cos(\theta) = \cos\left(2 \times \frac{\theta}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) =$$
$$= 1 - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Então, $\cos(\theta) - 1 = -2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$

Seja $\alpha = Arg(w)$

Então,

$$\tan(\alpha) = \frac{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{-2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{-\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)} = \tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$$

Então, $Arg(w) = \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi+\theta}{2}$

Por outro lado,

$$|w| = \sqrt{\left[-2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]^2 + \left[2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]^2}$$

$$= \sqrt{4\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]}$$

$$= \sqrt{4\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = 2\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \text{ visto que } \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$$

3. .

3.1. .

$f(x) = -1 \Leftrightarrow e^{2x} - 2e^x + 1 = 0 \Leftrightarrow (e^x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow x = 0$

$C.S. = \{0\}$

3.2. A função f é contínua em $\mathbb{R}$, em particular, é contínua em $[0;1]$

Assim, a função g é contínua em $[0;1]$, por se tratar da diferença de duas funções contínuas

Por outro lado

$g(0) = f(0) - 1 = -1 - 1 = -2 < 0$

$g(1) = e^2 - 2e - 1 > 0$

Como a função g é contínua em $[0;1]$ e $g(0)\times g(1) < 0$, então, pelo corolário do teorema de Bolzano, existe pelo pelo menos um zero da função g em $]0;1[$

4. .

4.1. .

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{2x+\ln(x+1)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(x)+\frac{x}{2}}{2x+\ln(x+1)} =^{\left(\frac{0}{0}\right)} \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\sin(x)}{x}+\frac{1}{2}}{2+\frac{\ln(x+1)}{x}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin(x)}{x}+\frac{1}{2}}{2+\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(x+1)}{x}} = \frac{1+\frac{1}{2}}{2+\lim\limits_{y\to 0^+}\frac{y}{e^y-1}} = \frac{\frac{3}{2}}{2+\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0^+}\frac{e^y-1}{y}}} = \frac{\frac{3}{2}}{2+\frac{1}{1}} = \frac{\frac{3}{2}}{2+1} = \frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{1}{2}$$

Cálculos auxiliares

Fez-se a mudança de variável

$y = \ln(x+1) \Leftrightarrow x = e^y - 1$

se $x \to 0^+$, então, $y \to 0^+$

Nota:

Aplicaram-se os **limites notáveis**
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$

Resposta: (B)

4.2. $\pi \in D_f$

A função f é contínua em $x=\pi$, se existir $\lim\limits_{x\to\pi} f(x)$, ou seja,

se $\lim\limits_{x\to\pi^-} f(x) = \lim\limits_{x\to\pi^+} f(x) = f(\pi)$

Ora,

$\lim\limits_{x\to\pi^-} f(x) = \lim\limits_{x\to\pi^-} \left(\sin(x) + \frac{x}{2}\right) = \sin(\pi) + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

$\lim\limits_{x\to\pi^+} f(x) = \lim\limits_{x\to\pi^+} \left(\frac{e^{x-\pi}-1}{x-\pi} - 1 + \frac{\pi}{2}\right) =$

$= \lim\limits_{x\to\pi^+} \frac{e^{x-\pi}-1}{x-\pi} - 1 + \frac{\pi}{2} = \lim\limits_{x-\pi\to 0^+} \frac{e^{x-\pi}-1}{x-\pi} - 1 + \frac{\pi}{2} = 1 - 1 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

$f(\pi) = \ln\left(e^k\right) + 2k + \pi = k + 2k + \pi = 3k + \pi$

Assim, se $3k + \pi = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 3k = \frac{\pi}{2} - \pi \Leftrightarrow 3k = -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow k = -\frac{\pi}{6}$, a função f é contínua em $x = \pi$

Nota:

Aplicou-se o **limite notável** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

4.3. Determinemos a função derivada de f em $[0;\pi[$

$f'(x) = \left(\sin(x) + \frac{x}{2}\right)' = \cos(x) + \frac{1}{2}$

Procuremos os zeros de f'

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(x) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \vee x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Atribuindo valores a k, vem,

$k = 0 \hookrightarrow x = \frac{2\pi}{3} \vee x = -\frac{2\pi}{3}$

$k = 1 \hookrightarrow x = \frac{8\pi}{3} \vee x = \frac{4\pi}{3}$

$k = -1 \hookrightarrow x = -\frac{4\pi}{3} \vee x = -\frac{8\pi}{3}$

Como $x \in [0;\pi[$, tem-se que $x = \frac{2\pi}{3}$

Elaborando um quadro de sinais para a função derivada

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	\\\\\\
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}$	$\searrow$	\\\\\\

$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \frac{\frac{2\pi}{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}$

A função f é estritamente crescente em $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$, e é estritamente decrescente em $\left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right[$

Atinge o valor máximo $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}$, para $x = \frac{2\pi}{3}$

4.4. Sendo x a abcissa de A e de B, tem-se que:

$B\left(x; \frac{x}{2}\right)$ e $A(x; f(x))$

$\overline{AB} = \left|f(x) - \frac{x}{2}\right| = \left|\sin(x) + \frac{x}{2} - \frac{x}{2}\right| = |\sin(x)| = \sin(x)$, visto que $x \in]0;\pi[$

Assim, se j for a função área, vem,

$j(x) = \frac{\overline{AB} \times |\pi - x|}{2} = \frac{\sin(x) \times (\pi - x)}{2}$, com $x \in]0;\pi[$

Inserir a função na calculadora, ajustar a janela de visualização $[0;\pi] \times [0;2.5]$

Desenhar o gráfico da função j e procurar a abcissa do seu ponto de máximo

Encontramos o ponto $I(1.11;0.91)$, que se encontra assinalado no referencial

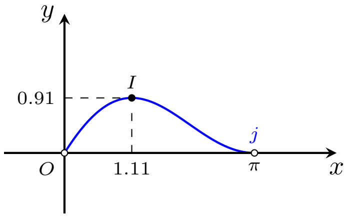

Figura 1

O valor de x, arredondado às centésimas, para o qual a área do triângulo $[ABC]$ é máxima, é 1.11 *rad*

5. .

Primeiro Processo

Comecemos por colocar as sete bolas brancas na prateleira. Como as sete bolas brancas não se distinguem então existem ${}^{16}C_7$ maneiras diferentes de as colocar na prateleira. Colocadas as sete bolas brancas, restam nove compartimentos para colocar as quatro bolas azuis que são numeradas e que portanto, se distinguem umas das outras. existem ${}^{9}A_4$ maneiras distintas de colocar as bolas azuis na prateleira. Por fim, restam cinco compartimentos para colocar as cinco bolas vermelhas, (que também são numeradas, e portanto, distinguem-se umas das outras). Há ${}^{5}A_5 = 5!$ maneiras distintas de colocar as bolas vermelhas na prateleira
Concluindo, há ${}^{16}C_7 \times {}^{9}A_4 \times {}^{5}A_5 = 4151347200$ maneiras diferentes de colocar as bolas na prateleira

Segundo Processo

Comecemos por colocar as cinco bolas vermelhas na prateleira. Como as cinco bolas vermelhas se distinguem, então existem ${}^{16}A_5$ maneiras diferentes de as colocar na prateleira. Colocadas as cinco bolas vermelhas, restam onze compartimentos para colocar as quatro bolas azuis que são numeradas e que portanto, se distinguem umas das outras. existem ${}^{11}A_4$ maneiras distintas de colocar as bolas azuis na prateleira. Por fim, restam sete compartimentos para colocar as sete bolas brancas, que não se distinguem umas das outras. Há uma única maneira de colocar as bolas brancas na prateleira (estando já colocadas as outras)
Concluindo, há ${}^{16}A_5 \times {}^{11}A_4 = 4151347200$ maneiras diferentes de colocar as bolas na prateleira

Terceiro Processo

Comecemos por colocar as quatro bolas azuis na prateleira. Como as quatro bolas azuis se distinguem, então existem ${}^{16}A_4$ maneiras diferentes de as colocar na caixa. Colocadas as quatro bolas azuis, restam doze compartimentos para colocar as cinco bolas vermelhas que são numeradas e que portanto, se distinguem umas das outras. existem ${}^{12}A_5$ maneiras distintas de colocar as bolas vermelhas na prateleira. Por fim, restam sete compartimentos para colocar as sete bolas brancas, que não se distinguem umas das outras. Há uma única maneira de colocar as bolas brancas na caixa (estando já colocadas as outras)
Concluindo, há ${}^{16}A_4 \times {}^{12}A_5 = 4151347200$ maneiras diferentes de colocar as bolas na prateleira

Obs.: Há mais processos de resolução

6. .

O número de casos possíveis é igual a ${}^{17}C_2$, dado que se escolhem duas bolas de um conjunto de dezassete

Quanto ao número de casos favoráveis:
Para que o produto dos números seja igual a quatro tem de ocorrer o seguinte:

⊛ Saem duas bolas com o número 2: ${}^{8}C_2$

⊛ Sai uma bola com número 1 e outra com número 4: ${}^{2}C_1 \times^3 C_1$

Então o número de casos favoráveis é igual a ${}^{8}C_2 +^2 C_1 \times^3 C_1$

Assim, a probabilidade pedida será igual a $P = \dfrac{{}^{8}C_2 +^2 C_1 \times^3 C_1}{{}^{17}C_2} = \dfrac{1}{4}$

7. A equação reduzida da reta r é da forma $y = mx + b, m, b \in \mathbb{R}$

Ora,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{-x^2+2}{x-1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2+2}{x^2-x} =^{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)} \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(-1+\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{x}{x^2}\right)} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-1+\frac{2}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)} =$$

$$= \frac{-1+0}{1-0} = -1$$

Logo, $m = -1$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)+x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x^2+2}{x-1}+x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x^2+2+x^2-x}{x-1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x+2}{x-1}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(-1+\frac{2}{x}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-1+\frac{2}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \frac{-1+0}{1-0} = -1$$

Logo, $b = -1$

Concluindo, equação reduzida da reta r é $y = -x - 1$

Observação: Também se poderia ter optado pelo cálculo dos limites quando x tende para $-\infty$

Resposta: (D)

8. .

8.1. Determinemos uma equação do plano ABC
Um vetor normal ao plano poderá ser um vetor diretor da reta que contém a altura da pirâmide, ou seja, poderá ser $\overrightarrow{\alpha}(0; 2; 2)$
assim, $ABC: 0x + 2y + 2z + d = 0, d \in \mathbb{R}$, ou seja, $ABC: 2y + 2z + d = 0, d \in \mathbb{R}$
Como $A(0, 2; 0)$ é um ponto deste plano, vem,

$$2 \times 2 + 2 \times 0 + d = 0 \Leftrightarrow 0 + 4 + d = 0 \Leftrightarrow d = -4$$

Logo, $ABC: 2y + 2z - 4 = 0$, ou seja, $ABC: y + z - 2 = 0$

Determinemos, agora o ponto S, de interseção deste plano com a reta que contém a altura da pirâmide

Ora, um ponto genérico da reta é $(2; -2+2k; -2+2k), k \in \mathbb{R}$
Assim, substituindo na equação do plano, vem,

$-2+2k-2+2k-2=0 \Leftrightarrow 4k-6=0 \Leftrightarrow k=\frac{3}{2}$
Portanto,
$S\left(2; -2+2\times\frac{3}{2}; -2+2\times\frac{3}{2}\right)$, ou seja, $S\,(2;1;1)$

Determinemos as coordenadas do ponto V

Este ponto é o ponto de de interseção do plano ABV com a reta que contém a altura da pirâmide

Ora, um ponto genérico da reta é $(2; -2+2k; -2+2k), k \in \mathbb{R}$
Assim, substituindo na equação do plano, vem,

$-3\times 2-2+2k-2+2k-2=0 \Leftrightarrow 4k-12=0 \Leftrightarrow k=3$

Portanto,

$V\,(2; -2+2\times 3; -2+2\times 3)$, ou seja, $V\,(2;4;4)$

A medida da altura da pirâmide é $\overline{VS}=\sqrt{(2-2)^2+(4-1)^2+(4-1)^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

8.2. Um vetor normal ao plano ABV é $\overrightarrow{\beta}(-3;1;1)$

Um vetor normal ao plano α é $\overrightarrow{\alpha}(2\lambda^2-1; 2\lambda^2; 1)$

O plano ABV é perpendicular ao plano α, se $\overrightarrow{\alpha}\cdot\overrightarrow{\beta}=0$

$\overrightarrow{\alpha}\cdot\overrightarrow{\beta}=0 \Leftrightarrow (2\lambda^2-1)\times(-3)+2\lambda^2\times 1+1\times 1=0 \Leftrightarrow -6\lambda^2+3+2\lambda^2+1=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -4\lambda^2=-4 \Leftrightarrow \lambda^2=1 \Leftrightarrow \lambda=\pm 1$

Resposta: existem dois valores para λ

9. $\left(2x-\frac{1}{2y}\right)^8=$
$=\sum_{p=0}^{8}\left[{}^8C_p\times(2x)^{8-p}\times\left(-\frac{1}{2y}\right)^p\right]=$
$=\sum_{p=0}^{8}\left[{}^8C_p\times 2^{8-p}\times x^{8-p}\times(-1)^p\times\left(\frac{1}{2y}\right)^p\right]=$
$=\sum_{p=0}^{8}\left[{}^8C_p\times(-1)^p\times 2^{8-p}\times x^{8-p}\times 2^{-p}\times y^{-p}\right]=$
$=\sum_{p=0}^{8}\left[{}^8C_p\times(-1)^p\times 2^{8-2p}\times x^{8-p}\times y^{-p}\right]=$

Procuremos $p\in\mathbb{N}_0$ de modo que $8-p=4 \wedge -p=-4 \wedge 0\le p\le 8$

$8-p=4 \wedge -p=-4 \wedge 0\le p\le 8 \Leftrightarrow p=4 \wedge p=4 \wedge 0\le p\le 8 \Leftrightarrow p=4\in\mathbb{N}_0$, e $0\le 4\le 8$

Então, existe termo da forma ax^4y^{-4} no desenvolvimento

Termo:${}^8C_4\times(-1)^4\times 2^{8-8}\times x^{8-4}\times y^{-4}=70x^4y^{-4}$

Resposta: (A)

10. Se, se retiram, ao acaso, duas bolas da caixa X e se colocam na caixa Y e de seguida, se retiram três bolas da caixa Y e se multiplicam os respetivos números, então, atendendo à constituição das duas caixas, independentemente do tipo de número das bolas que saem da caixa X , quando colocadas na caixa Y, o produto das três bolas retiradas da caixa Y vai ser sempre um número par. Com efeito, na pior das hipóteses, poderia entrar na caixa Y a bola com o número um que existe na caixa X, e neste caso, ficariam na caixa Y duas bolas com número ímpar e as restantes com número par. Ora, quando se retiram três bolas da caixa Y, necessariamente, uma delas vai ter número par, e por consequência, quando se multiplicam os números obtemos um número par

    Assim sendo, a probabilidade pedida é igual a um

11. .

    Por hipótese sabemos que $f'(c) = 0$, para $c \in]a; b[$

    Ora,

    $$f''(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} = \lim_{x \to c^+} \frac{f'(x) - 0}{x - c} = \lim_{x \to c^+} \frac{f'(x)}{x - c}$$

    Como também se sabe que $f''(c) > 0$, então, existe um intervalo $]c; c + \varepsilon[, \varepsilon > 0$, no qual $f'(x)$ toma sinal positivo. Sendo assim, a função f é crescente em $]c; c + \varepsilon[, \varepsilon > 0$, ou seja, $f(c) \leq f(x)$

    De modo análogo,

    $$f''(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} = \lim_{x \to c^-} \frac{f'(x) - 0}{x - c} = \lim_{x \to c^-} \frac{f'(x)}{x - c}$$

    Como também se sabe que $f''(c) > 0$, então, existe um intervalo $]c - \varepsilon; c[, \varepsilon > 0$, no qual $f'(x)$ toma sinal negativo. Sendo assim, a função f é decrescente em $]c - \varepsilon; c[, \varepsilon > 0$, ou seja, $f(c) \leq f(x)$

    Concluindo, a função f admite um mínimo relativo para $x = c$

    Resposta: (B)

12. Determinemos a função derivada de F

    $$F'(t) = \left(A \times e^{-Bt}\right)' = -AB \times e^{-Bt}$$

    Assim,

    $$\frac{F(t)}{F'(t)} = \frac{A \times e^{-Bt}}{-AB \times e^{-Bt}} = -\frac{1}{B}$$

    Resposta: (B)

13. .

    Ora, $\lim(a_n) = \lim\left(2 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 2 + \frac{1}{\sqrt{\lim(n)}} = 2 + \frac{1}{+\infty} = 2^+$

    Assim,

    $$\ln\left[e^{\lim f(a_n)}\right] = \lim f(a_n) = 3$$

    Resposta: (C)

14. A abcissa do ponto de tangência A, é o zero da função f

Ora,

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1-\ln(x)}{e^{-x}}=0 \wedge x>0 \Leftrightarrow 1-\ln(x)=0 \wedge x>0 \Leftrightarrow \ln(x)=1 \wedge x>0 \Leftrightarrow x=e \wedge x>0 \Leftrightarrow x=e$$

Assim, o ponto de tangência é $A(e;0)$
Determinemos a função derivada de f

$$f'(x)=\left(\frac{1-\ln(x)}{e^{-x}}\right)'=\frac{-\frac{1}{x}\times e^{-x}-(1-\ln(x))\times(-e^{-x})}{e^{-2x}}=\frac{e^{-x}\left(-\frac{1}{x}+1-\ln(x)\right)}{e^{-2x}}=\frac{-\frac{1}{x}+1-\ln(x)}{e^{-x}}$$

Seja m o declive da reta tangente

$$m=f'(e)=\frac{-\frac{1}{e}+1-\ln(e)}{e^{-e}}=\frac{-\frac{1}{e}+1-1}{e^{-e}}=-\frac{\frac{1}{e}}{e^{-e}}=-\frac{1}{e^{1-e}}=-e^{e-1}$$

Assim sendo, a equação reduzida da reta tangente t é da forma $y=-e^{e-1}x+b, b\in\mathbb{R}$

Como a reta passa no ponto $A(e;0)$, vem,

$$0=-e^{e-1}\times e+b \Leftrightarrow b=e^{e}$$

Portanto, a equação reduzida da reta t é $y=-e^{e-1}x+e^{e}$

Determinemos a abcissa do ponto B, que é a solução da equação $-e^{e-1}x+e^{e}=-e$

$$-e^{e-1}x+e^{e}=-e \Leftrightarrow -e^{e-1}x=-e^{e}-e \Leftrightarrow x=\frac{e^{e}+e}{e^{e-1}}$$

Assim a área do trapézio $[ABCO]$ é igual a

$$A_{[ABCO]}=\frac{\overline{AO}+\overline{BC}}{2}\times\overline{OC}=\frac{e+\frac{e^{e}+e}{e^{e-1}}}{2}\times e=\frac{e^{2}+\frac{e^{e+1}+e^{2}}{e^{e-1}}}{2}=\frac{e^{e+1}+e^{e+1}+e^{2}}{2e^{e-1}}=$$

$$=\frac{2e^{e+1}+e^{2}}{2e^{e-1}}=e^{2}+\frac{1}{2}e^{3-e}$$