OmegaMat

Exame Modelo VIII de Matemática A

Duração do Exame: 150 **minutos** + 30 **minutos de tolerância** | **junho de 2020**

12.º Ano de Escolaridade

Utiliza apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta

É permitido o uso de calculadora

Não é permitido o uso de corretor. Risca o que pretendes que não seja classificado

Para cada resposta identifica o item

Apresenta as tuas respostas de forma legível

Apresenta apenas uma resposta para cada item

A prova apresenta um formulário na página 2

As cotações dos itens encontram-se na página 8

Na resposta aos itens de seleção (escolha múltipla), seleciona a resposta correta. Escreve na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresenta o teu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiveres de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida aproximação apresenta sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr *(α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)*

área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

área de um setor circular:

$\dfrac{\alpha r^2}{2}$ *(α- amplitude, em radianos, do ângulo ao centro, r - raio)*

área lateral de um cone: $\pi r g$ *(r - raio da base, g - geratriz)*

área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ *(r - raio)*

Volume da pirâmide: $\dfrac{1}{3}\times$ *área da base* $\times$ *Altura*

Volume do cone: $\dfrac{1}{3}\times$ *área da base* $\times$ *Altura*

Volume da esfera: $\dfrac{4}{3}\pi r^3$ *(r - raio)*

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\dfrac{u_1+u_n}{2}\times n$

Progressão geométrica: $u_1\times\dfrac{1-r^n}{1-r}$, $r\neq 1$

Trigonometria

$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$

$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$

Complexos

$(|z|e^{i\theta})^n=|z|^n e^{i(n\theta)}$

$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}$, $k\in\{0;1;2;...;n-1\}$ e $n\in\mathbb{N}$

Regras de derivação

$(u+v)'=u'+v'$

$(uv)'=u'v+uv'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

$(u^n)'=nu^{n-1}u' \quad (n\in\mathbb{R})$

$(\sin u)'=u'\cos u$

$(\cos u)'=-u'\sin u$

$(\tan u)'=\dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)'=u'e^u$

$(a^u)'=u'a^u\ln a \quad (a\in\mathbb{R}^+\backslash\{1\})$

$(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$

$(\log_a u)'=\dfrac{u'}{u\ln a} \quad (a\in\mathbb{R}^+\backslash\{1\})$

Limites notáveis

$\lim\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e \quad (n\in\mathbb{N})$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$

$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x}{x^p}=+\infty \quad (p\in\mathbb{R})$

1. Considera a função f, real de variável real, definida em $\mathbb{R}$, por $f(x) = \sin(\pi x)$

   Seja g, a função real de variável real, definida em $\mathbb{R}$, por $g(x) = -2f(4x)$

   Pode-se afirmar que a função g, no intervalo $[0; 2]$, tem

   (A) 8 zeros
   (B) 9 zeros
   (C) 10 zeros
   (D) 3 zeros

2. O Professor de Matemática de uma turma de 12º ano, colocou aos seus alunos o seguinte problema de cálculo combinatório:
   Considerem o conjunto A de todos os números de cinco algarismos que se podem formar com os algarismos de 1 a 9
   Considerem, agora, o conjunto B, subconjunto de A, cujos elementos satisfazem os seguintes requisitos:

   - *cada número tem os algarismos todos diferentes*
   - *começam todos por* 7 *e terminam em* 2
   - *a soma dos cinco algarismos é ímpar*

   Qual é o cardinal do conjunto B?

   Duas respostas corretas ao problema proposto foram apresentadas por dois alunos da turma, Rodrigo e Carolina

   Numa composição, explica-as

Resposta do Rodrigo

$\#B = {}^3C_1 \times {}^3C_1 \times {}^4A_2 + {}^3A_3 = 114$

Resposta da Carolina

$\#B = {}^4C_2 \times {}^3C_2 \times 2! \times {}^3C_1 + 3! = 114$

3. Considera, num plano munido de um referencial ortonormado xOy, uma circunferência de centro na origem e de raio r, com $r > 0$, como se observa na figura 1

Sabe-se que:

- os pontos A, B, C e D pertencem à circunferência
- os pontos A e B são simétricos em relação ao eixo Oy
- os pontos C e D são simétricos em relação ao eixo Oy
- os triângulos $[ABO]$ e $[CDO]$, são simétricos em relação ao eixo Ox
- $E(r; 0)$
- o ponto A move-se no primeiro quadrante, e os pontos B, C e D, acompanham esse movimento
- $E\hat{O}A = x$, com $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$

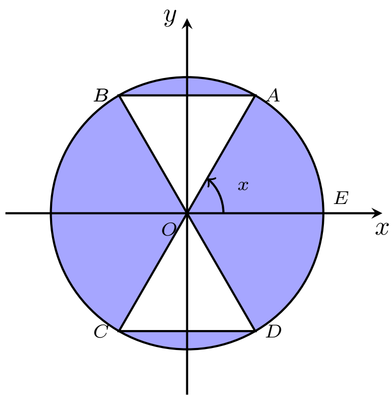

Figura 1

A área da região colorida da figura, é dada, em função de x, por:

(A) $\pi - \sin(2x)$
(B) $r^2(\pi - \sin(2x))$
(C) $r(\pi - \sin(2x))$
(D) $r^2(\pi - \cos(2x))$

4. Sejam a e b, dois números reais, com $a > 1$ e $b > 1$

   Sabe-se que $\log_a(b^2) = 4$

   Mostra que, para esses valores de a e b, se tem, $\log_b\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right) = \frac{1}{4}$

5. Na figura 2 está representado, num plano munido de um referencial ortonormado xOy, parte do gráfico de uma função quadrática f, de domínio $\mathbb{R}$, e definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, $b, c \in \mathbb{R}$, e $a \in \mathbb{R}^+$

   Seja g, a função real de variável real, definida por $g(x) = f(x) + e$

   Em qual das opções seguintes pode estar representado parte do gráfico da função g', derivada da função g?

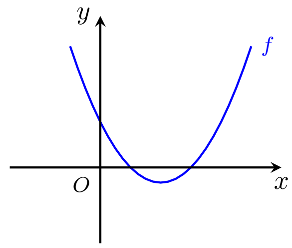

Figura 2

(A)

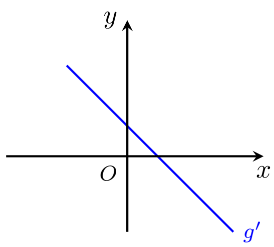

Figura 3

(B)

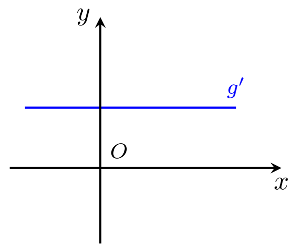

Figura 4

(C)

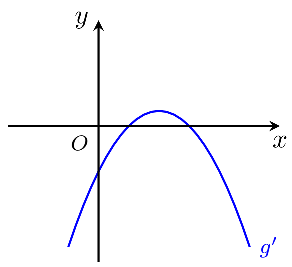

Figura 5

(D)

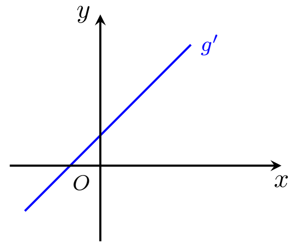

Figura 6

6. Uma caixa contém dez bolas numeradas de 1 a 10
   Retiram-se da caixa duas bolas, sucessivamente e sem reposição

   Qual é a probabilidade de saírem duas bolas em que o número da segunda bola não é o sucessor do número da primeira bola?

   (A) 10%

   (B) 40%

   (C) 80%

   (D) 90%

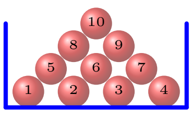

Figura 7

7. Numa caixa, identificada por X, estão seis bolas numeradas de um a seis, e numa caixa, identificada por Y, estão três bolas numeradas com o número um, quatro numeradas com o número dois e cinco numeradas com o número três

Lança-se um dado cúbico equilibrado

Se sair número par, retira-se a bola com o número quatro da caixa X e coloca-se na caixa Y, juntamente com mais onze bolas iguais a ela

Seguidamente retiram-se duas bolas da caixa Y e somam-se os números das bolas que saíram

Sejam os acontecimentos

A : sai número ímpar no lançamento do dado

B : A soma dos números das duas bolas extraídas da caixa Y é igual a cinco

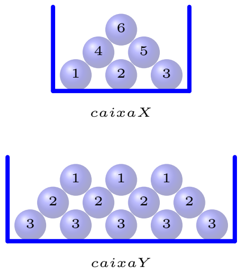

Figura 8

Sem utilizar a fórmula de probabilidade condicionada, mostra que

$$P(B|\overline{A}) = \frac{^{12}C_1 \times ^3 C_1 + ^4 C_1 \times ^5 C_1}{^{24}C_2}$$

8. Seja f, a função real de variável real, definida por $f(x) = \ln(e^{4x} - e^{2x})$

   8.1. Determina o domínio da função f

   8.2. Escreve as equações das assíntotas ao gráfico da função f

9. Seja g, a função real de variável real, definida em $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, por $g(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$
   Seja g', a função derivada da função g

   9.1. Estuda a função g, quanto a monotonia e existência de extremos

   9.2. Em qual das opções está o valor de $\lim\limits_{x \to e} \dfrac{g'(x)}{x - e}$?

   (A) e^{-1}
   (B) e^{-2}
   (C) $-e^{-1}$
   (D) $-e^{-2}$

10. Numa escola com 150 Professores, 100 são do sexo feminino. A direção da escola, aquando da preparação do ano letivo, terá de escolher um grupo de Professores para desempenharem a função de Diretor de Turma
    Definido o perfil do Diretor de Turma pela Direção, estima-se que, dos Professores da escola do sexo feminino, 90% têm perfil para desempenhar o cargo, e que dos Professores da escola do sexo masculino, 60% têm perfil para desempenhar o cargo

    Escolhido um Professor, ao acaso, qual é a probabilidade de ser do sexo feminino, se não tem perfil para desempenhar a função de Diretor de Turma?

11. Seja $\mathbb{C}$, o conjunto dos números complexos e seja z um número complexo

11.1. Em qual das opções pode estar representado o conjunto dos pontos do plano complexo, afixos do complexo z, que satisfazem a condição $1 \leq |z-2i| \leq 3 \wedge \frac{\pi}{4} < Arg(z-2i) < \frac{3\pi}{4}$

(A)

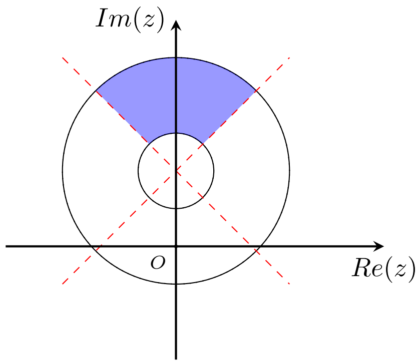

Figura 9

(B)

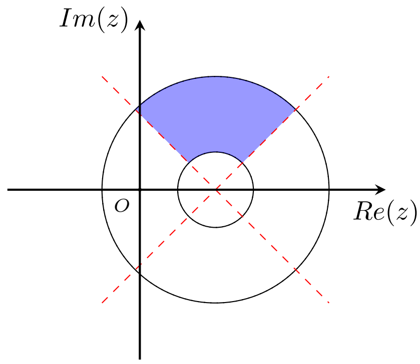

Figura 10

(C)

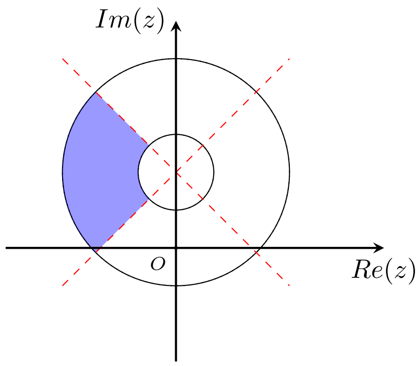

Figura 11

(D)

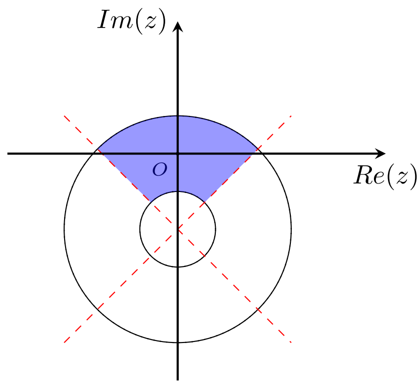

Figura 12

11.2. Admite que $z_1 = 2e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$ e $z_2 = 2e^{i\left(\frac{13\pi}{20}\right)}$ são duas raízes índice n, consecutivas, do número complexo z. Determina o valor de n e o número complexo z

12. Seja f, a função real e variável real, de domínio $]-\infty; -a]$, definida por
$f(x) = b + \sqrt{-x-a}$ com $a > 0$ e $b > 0$, e a função g, de domínio $[a; +\infty[$, definida por $g(x) = f(-x)$
No referencial cartesiano ortonormado xOy, estão representados partes dos gráficos das funções f e g, e um trapézio isósceles $[ABCD]$, como se observa na figura 13

Sabe-se que:

- os pontos A e D pertencem ao gráfico da função g
- os pontos B e C pertencem ao gráfico da função f
- a abcissa do ponto A é a
- a abcissa do ponto D excede a abcissa do ponto A em uma unidade

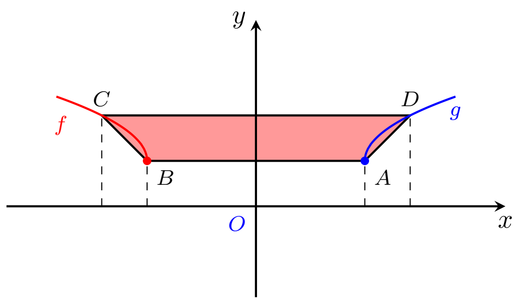

Figura 13

A área do trapézio $[ABCD]$, é dada, em função de a, por:

(A) $2a+2$

(B) $a+1$

(C) $4a+2$

(D) $2a+1$

13. Seja f, a função real de variável real, definida por $f(x) = xe^x - e^x$
na figura 14, estão representados, num plano munido de um referencial ortonormado xOy, parte do gráfico da função f, a reta r, tangente ao gráfico da função no ponto de abcissa 2, e dois pontos do gráfico, I e T

Sabe-se que:

- I é ponto de inflexão do gráfico da função f
- T é o ponto de interseção da reta r com o gráfico de f

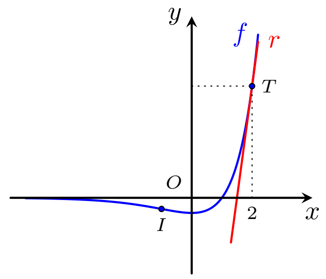

Figura 14

13.1. Escreve a equação reduzida da reta r

13.2. Mostra, analiticamente, que o ponto I tem coordenadas $\left(-1; -\dfrac{2}{e}\right)$

13.3. Mostra, recorrendo ao Teorema de Bolzano, que a função g, real de variável real, definida por $g(x) = -1 + f(2x)$ admite um zero no intervalo $]0;1[$

14. Nas festas da cidade de Paredes, junto ao parque da cidade, há um carrossel para crianças com a forma que se apresenta na figura 15
A base do carrossel é formado por um prisma octogonal regular, e o telhado é uma pirâmide octogonal, como se observa na figura 15
Na figura está um modelo do carrossel

Admite que se fixa um referencial ortonormado $Oxyz$, como o representado na figura 15

Sabe-se que:

- $a > 0$
- o ponto A pertence ao eixo Oy
- $B\left(\dfrac{3}{2}a; \dfrac{3}{2}a; 0\right)$
- $\overrightarrow{AD} = (0, 0; 4a)$
- $\overrightarrow{CD} = (0, 4a; 0)$
- $V(0; 0; 5a)$
- a reta AV tem equação vetorial
$(x; y; z) = (0, -2a, 10a) + k(0, -4a, 10a), k \in \mathbb{R}$

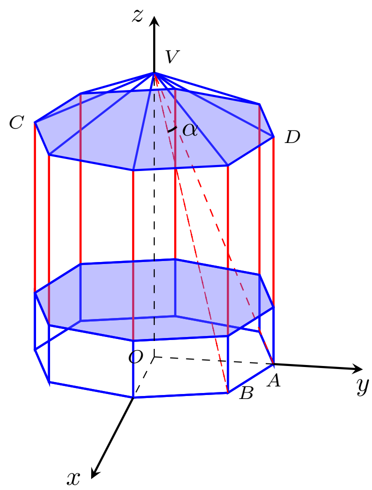

Figura 15

14.1. Sendo α a amplitude do ângulo BVA, um valor aproximado às décimas de α é:

(A) 16.6°
(B) 16.7°
(C) 16.8°
(D) 16.9°

14.2. Escreve uma equação cartesiana do plano ABC

COTAÇÕES

1.			
		....	5 pontos
2.			
		....	15 pontos
3.			
		....	5 pontos
4.			
		....	10 pontos
5.			
		....	5 pontos
6.			
		....	5 pontos
7.			
		....	15 pontos
8.			
	8.1	....	5 pontos
	8.2	....	15 pontos
9.			
	9.1	....	15 pontos
	9.2	....	5 pontos
10.			
		....	15 pontos
11.			
	11.1	....	5 pontos
	11.2	....	10 pontos
12.			
		....	5 pontos
13.			
	13.1	....	10 pontos
	13.2	....	15 pontos
	13.3	....	10 pontos
14.			
	14.1	....	15 pontos
	14.2	....	15 pontos
		TOTAL	**100 pontos**