Resolução do Exame Modelo VIII de Matemática A

Duração do Exame: 150 **minutos** + 30 **minutos de tolerância** | **junho de 2020**

12.º Ano de Escolaridade

1. Ora, $g(x) = -2f(4x) = -2\sin(4\pi x)$

   Procuremos os zeros de g em $[0;2]$

   $g(x) = 0 \Leftrightarrow -2\sin(4\pi x) = 0 \Leftrightarrow \sin(4\pi x) = 0 \Leftrightarrow \sin(4\pi x) = \sin(0) \Leftrightarrow 4\pi x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{4\pi}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{k}{4}, k \in \mathbb{Z}$

   Atribuindo valores a k, vem,

   $k = 0 \to x = 0 \in [0;2]$

   $k = 1 \to x = \frac{1}{4} \in [0;2]$

   $k = 2 \to x = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \in [0;2]$

   $k = 3 \to x = \frac{3}{4} \in [0;2]$

   $k = 4 \to x = \frac{4}{4} = 1 \in [0;2]$

   $k = 5 \to x = \frac{5}{4} \in [0;2]$

   $k = 6 \to x = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \in [0;2]$

   $k = 7 \to x = \frac{7}{4} \in [0;2]$

   $k = 8 \to x = \frac{8}{4} = 2 \in [0;2]$

   $k = 9 \to x = \frac{9}{4} \notin [0;2]$

   A função g tem 9 zeros no intervalo $[0;2]$

   Resposta: (B)

   Obs.: Poderíamos inserir a função g na calculadora gráfica, definindo a janela $[0;2] \times [-5;5]$, e contar os zeros da função

   Gráfico da função g no intervalo $[0;2]$

   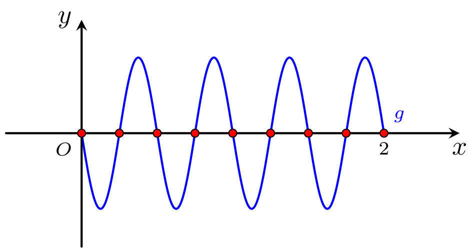

   Figura 1

2. Fazendo um esquema

Cada número do conjunto B é da forma: $7 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad 2$

Para que a soma dos cinco algarismos do número seja ímpar é preciso que a soma dos três algarismos em falta seja par

Ora, para que esta soma seja par, dois casos podem ocorrer:

- um algarismo é par e os outros dois são ímpares(e distintos)
- os três algarismos são pares (e distintos)

Resposta do Rodrigo

1º. Caso:

Neste caso, temos de escolher um número par de entre três disponíveis (4, 6 e 8), visto que o 2 já está escolhido, e essa escolha pode ser feita de ${}^3C_1$ maneiras distintas. Para além disso, temos de escolher a posição que este algarismo vai ocupar nos três lugares disponíveis, o que pode ser feito de ${}^3C_1$ maneiras distintas. Assim, há ${}^3C_1 \times {}^3C_1$ maneiras distintas de escolher e colocar o número par
Escolhido o algarismo par e fixada a sua posição, restam duas posições para quatro algarismos ímpares (1,3, 5, 9), visto que o 7 já está escolhido. Há ${}^4A_2$ maneiras distintas de escolher ordenadamente os dois algarismos ímpares para estas duas posições

Então há ${}^3C_1 \times {}^3C_1 \times {}^4A_2$ números distintos neste caso

2º. Caso:

Temos três algarismos pares disponíveis (4, 6 e 8), visto que o 2 já está escolhido, e três posições para eles. Então, temos de escolher ordenadamente três algarismos pares de entre os três que existem, para essas três posições. O número de maneiras distintas de o fazer é ${}^3A_3$ (para a primeira posição temos três escolhas; fixado esse algarismo, temos duas escolhas para a segunda posição; fixados esses dois algarismos, para a terceira posição temos uma escolha)

Concluindo, $\#B = {}^3C_1 \times {}^3C_1 \times {}^4A_2 + {}^3A_3$

Resposta da Carolina

1º. Caso:

Neste caso, temos de escolher dois números ímpares de entre quatro disponíveis (1, 3, 5 e 9), visto que o 7 já está escolhido, e essa escolha pode ser feita de ${}^4C_2$ maneiras distintas. Para além disso, temos de escolher a posição que este dois algarismos vão ocupar nos três lugares disponíveis, o que pode ser feito de ${}^3C_2$ maneiras distintas. Escolhidos e colocados os dois algarismos ímpares, eles ainda podem permutar entre si de 2! maneiras distintas. Assim, há ${}^4C_2 \times {}^3C_2 \times 2!$ maneiras distintas de escolher e colocar os números ímpares
Escolhidos os dois algarismos ímpares e fixada a sua posição, resta uma posição para três algarismos pares (4, 6 e 8), visto que o 2 já está escolhido. Há ${}^3C_1$ maneiras distintas de colocar o algarismo par

Então há $\#B = {}^4C_2 \times {}^3C_2 \times 2! \times {}^3C_1$ números distintos neste caso

2º. Caso:

Temos três algarismos pares disponíveis (4, 6 e 8), visto que o 2 já está escolhido, e três posições para eles. Então, colocam-se os três algarismos nas três posições, permutando entre si. O número de maneiras distintas de o fazer é 3!
Concluindo, $\#B = {}^4C_2 \times {}^3C_2 \times 2! \times {}^3C_1 + 3!$

3. Como a circunferência tem raio r, então

   $A(r\cos(x); r\sin(x))$, com $\cos(x) > 0$ e $\sin(x) > 0$

   Sendo F, a projeção ortogonal do ponto A sobre o eixo Oy, tem-se que $F(0; r\sin(x))$

   Assim,

   $\overline{AB} = 2r\cos(x)$

   $\overline{OF} = r\sin(x)$

   Portanto, a área da região colorida é

   $$A_{regiaocolorida} = \pi r^2 - 2\times A_{[ABO]} = \pi r^2 - 2\times \frac{\overline{AB}\times\overline{OF}}{2} = \pi r^2 - \overline{AB}\times\overline{OF} = \pi r^2 - 2r\cos(x)\times r\sin(x) =$$

   $$= \pi r^2 - 2r^2\sin(x)\cos(x) = \pi r^2 - r^2\sin(2x) = r^2(\pi - \sin(2x))$$

   Resposta: (B)

4. De $\log_a(b^2) = 4$, tem-se,

   $\log_a(b^2) = 4 \Leftrightarrow 2\log_a(b) = 4 \Leftrightarrow \log_a(b) = 2$

   Assim,

   $$\log_b\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right) = \frac{\log_a\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)}{\log_a(b)} = \frac{\log_a\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\right)}{2} = \frac{\frac{1}{2}\log_a\left(\frac{b}{a}\right)}{2} = \frac{\log_a(b) - \log_a(a)}{4} = \frac{2-1}{4} = \frac{1}{4}$$

5. $g(x) = f(x) + e$

   Assim,

   $g'(x) = (f(x)+e)' = f'(x) + e' = (ax^2+bx+c)' + 0 = 2ax + b$, com $a > 0$

   Logo, o gráfico da função g' só poderá estar na opção D

   Resposta: (D)

6. Consideremos o acontecimento

   A: saem duas bolas em que o número da segunda bola é o sucessor do número da primeira bola

   Então,

   $\overline{A}$: saem duas bolas em que o número da segunda bola não é o sucessor do número da primeira bola

   $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

   Calculemos, então, $P(A)$

   número de casos possíveis:

   Se, se retiram duas bolas da caixa sucessivamente e sem reposição, então o número de maneiras distintas de o fazer é dado por ${}^{10}A_2$. Este número é o número de casos possíveis

   Número de casos favoráveis:

   Pretende-se que saiam duas bolas em que o número da segunda bola é o sucessor do número da primeira bola

   Então temos os seguintes casos a considerar:

   $1;2$ ou $2;3$ ou $3;4$ ou $\cdots$ $9;10$. Ou seja, são nove casos favoráveis

   Sendo assim, $P(A) = \frac{9}{{}^{10}A_2}$

   Logo,

   $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{9}{{}^{10}A_2} = 1 - 0.1 = 0.9 = 90\%$

   Resposta: (D)

7. $P(B|\overline{A})$, é a probabilidade de a soma dos números das duas bolas extraídas da caixa Y ser cinco, sabendo que não saiu número ímpar no lançamento do dado
   Ora, se saiu número par no lançamento do dado, então, vai ser retirada a bola com o número quatro da caixa X e, juntamente com mais onze bolas iguais a ela, vão ser colocadas na caixa Y
   Assim, na caixa Y passa a haver vinte e quatro bolas, sendo três bolas numeradas com o número um, quatro numeradas com o número dois, cinco numeradas com o número três e doze numeradas com o número quatro
   Como a seguir se retiram em simultâneo, duas bolas da caixa Y, então o número de casos possíveis é igual a ${}^{24}C_2$

   Quanto ao número de casos favoráveis:

   Pretende-se que a soma dos números das duas bolas extraídas seja igual a cinco, então podem ocorrer os seguintes casos:

   - sai uma bola com o número quatro e uma bola com o número um : ${}^{12}C_1 \times {}^{3}C_1$
   - sai uma bola com o número dois e uma bola com o número três : ${}^{4}C_1 \times {}^{5}C_1$

   Então o número de casos favoráveis é igual a ${}^{12}C_1 \times {}^{3}C_1 + {}^{4}C_1 \times {}^{5}C_1$

   E a probabilidade pedida é,

   $$P(B|\overline{A}) = \frac{{}^{12}C_1 \times {}^{3}C_1 + {}^{4}C_1 \times {}^{5}C_1}{{}^{24}C_2}$$

8. .

8.1. $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} : e^{4x} - e^{2x} > 0\right\} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} = \mathbb{R}^+$

Cálculo auxiliar

$e^{4x} - e^{2x} > 0 \Leftrightarrow e^{4x} > e^{2x} \Leftrightarrow 4x > 2x \Leftrightarrow 2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$

8.2. $D_f = \mathbb{R}^+$
Assintotas verticais

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} [\ln(e^{4x} - e^{2x})] = \ln[\lim_{x\to 0^+} (e^{4x} - e^{2x})] = \ln(0^+) = -\infty$$

Logo, a reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico da função f

Como a função f é contínua em todo o seu domínio, então, não existem mais assíntotas verticais ao gráfico da função f

Assíntotas não verticais

A equação da assíntota não vertical é da forma $y = mx + b$, $m, b \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(e^{4x} - e^{2x})}{x} =^{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)} \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left[e^{4x}\left(1 - \frac{e^{2x}}{e^{4x}}\right)\right]}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(e^{4x}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{e^{2x}}\right)}{x}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{4x + \ln\left(1 - \frac{1}{e^{2x}}\right)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x}{x} + \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{e^{2x}}\right)}{x} = \lim_{x\to+\infty} (4) + \frac{0}{+\infty} = 4 + 0 = 4$$

Logo, $m = 4$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - 4x) = \lim_{x\to+\infty} [\ln(e^{4x} - e^{2x}) - 4x] =^{(\infty-\infty)} \lim_{x\to+\infty} \left[\ln\left[e^{4x}\left(1 - \frac{e^{2x}}{e^{4x}}\right)\right] - 4x\right] =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \left[\ln\left(e^{4x}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{e^{2x}}\right) - 4x\right] = \lim_{x\to+\infty} \left[4x + \ln\left(1 - \frac{1}{e^{2x}}\right) - 4x\right] =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \left[\ln\left(1 - \frac{1}{e^{2x}}\right)\right] = \ln(1) = 0$$

Logo, $b = 0$

Concluindo, a reta de equação $y = 4x$, é assíntota não vertical ao gráfico da função f, quando $x \to +\infty$

9. .

9.1. Determinemos a função derivada de g

$$g'(x) = \left(\frac{x}{\ln(x)}\right)' = \frac{1 \times \ln(x) - x \times \frac{1}{x}}{(\ln(x))^2} = \frac{\ln(x) - 1}{(\ln(x))^2}$$

Procuremos os zeros de g'

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln(x) - 1}{(\ln(x))^2} = 0 \land x > 0 \land x \neq 1 \Leftrightarrow \ln(x) - 1 = 0 \land (\ln(x))^2 \neq 0 \land x > 0 \land x \neq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) = 1 \land \ln(x) \neq 0 \land x > 0 \land x \neq 1 \Leftrightarrow x = e \land x > 0 \land x \neq 1 \Leftrightarrow x = e$$

Quadro de sinal de g'

x	0		1		e	$+\infty$
$\ln(x)-1$	$\backslash\backslash\backslash$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(\ln(x))^2$	$\backslash\backslash\backslash$	$+$	0	$+$	$+$	$+$
$g'(x)$	$\backslash\backslash\backslash$	$-$	$\backslash\backslash\backslash$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\backslash\backslash\backslash$	$\searrow$	$\backslash\backslash\backslash$	$\searrow$	e	$\nearrow$

$g(e)=\dfrac{e}{\ln(e)}=\dfrac{e}{1}=e$

A função g é estritamente decrescente em $]0;1[$ e em $]1;e]$, e é estritamente crescente em $[e;+\infty[$

Atinge o valor mínimo relativo e, para $x=e$

9.2. $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{g'(x)}{x-e}=\lim\limits_{x\to e}\dfrac{g'(x)-0}{x-e}=\lim\limits_{x\to e}\dfrac{g'(x)-g'(e)}{x-e}=g''(e)=\dfrac{2-\ln(e)}{e\times(\ln(e))^3}=\dfrac{2-1}{e\times 1^3}=\dfrac{1}{e}=e^{-1}$

Cálculos auxiliares

$g'(e)=\dfrac{\ln(e)-1}{(\ln(e))^2}=\dfrac{1-1}{1^2}=0$

$g''(x)=\left(\dfrac{\ln(x)-1}{(\ln(x))^2}\right)'=\dfrac{\frac{1}{x}\times(\ln(x))^2-(\ln(x)-1)\times 2\times\ln(x)\times\frac{1}{x}}{(\ln(x))^4}=$

$=\dfrac{\frac{1}{x}(\ln(x))^2-\frac{2}{x}(\ln(x))^2+\frac{2}{x}\ln(x)}{(\ln(x))^4}=\dfrac{-\frac{1}{x}(\ln(x))^2+\frac{2}{x}\ln(x)}{(\ln(x))^4}=\dfrac{\frac{1}{x}\ln(x)(2-\ln(x))}{(\ln(x))^4}=\dfrac{2-\ln(x)}{x(\ln(x))^3}$

Resposta: (A)

10. .

Sejam os acontecimentos:

M: o professor é do sexo feminino $\rightarrow P(M)=\dfrac{100}{150}=\dfrac{2}{3}$

$\overline{M}$: o professor é do sexo masculino $\rightarrow P(\overline{M})=1-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$

A: o professor tem perfil para desempenhar a função de Diretor de Turma

$\overline{A}$: o professor não tem perfil para desempenhar a função de Diretor de Turma

Então,

$P(A|M)=0.9$ e $P(A|\overline{M})=0.6$

Sabe-se que:

$P(A|M)=0.9\Leftrightarrow\dfrac{P(A\cap M)}{P(M)}=\dfrac{9}{10}\Leftrightarrow P(A\cap M)=\dfrac{9}{10}\times P(M)\Leftrightarrow P(A\cap M)=\dfrac{9}{10}\times\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow P(A\cap M)=\dfrac{3}{5}$

$P(A|\overline{M})=0.6\Leftrightarrow\dfrac{P(A\cap\overline{M})}{P(\overline{M})}=\dfrac{6}{10}\Leftrightarrow P(A\cap\overline{M})=\dfrac{6}{10}\times P(\overline{M})\Leftrightarrow P(A\cap\overline{M})=\dfrac{6}{10}\times\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow P(A\cap\overline{M})=\dfrac{1}{5}$

Elaborando uma tabela

	A	$\overline{A}$	
M	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{3}$
$\overline{M}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{3}$
	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

Pretende-se determinar $P(M|\overline{A})$

Ora, $P(M|\overline{A}) = \dfrac{P(M \cap \overline{A})}{\overline{A}} = \dfrac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{5}} = \dfrac{1}{3}$

11. .

11.1. A condição, $1 \leq |z - 2i| \leq 3$, que é equivalente a $1 \leq |z - (0 + 2i)| \leq 3$, representa, no plano complexo, uma coroa circular centrada no ponto $P(0; 2)$, afixo do número complexo $z = 2i$, e de raios 1 e 3

A condição $\frac{\pi}{4} < Arg(z - 2i) < \frac{3\pi}{4}$, que é equivalente a $\frac{\pi}{4} < Arg(z - (0 + 2i)) < \frac{3\pi}{4}$, representa, no plano complexo, o conjunto de pontos, afixos de z, que se situam entre a semirreta de origem P e que forma, com a semirreta de origem P e com direção e sentido do semieixo real positivo, um ângulo de amplitude$\frac{\pi}{4}$, e a semirreta de origem P e que forma, com a semirreta de origem P e com direção e sentido do semieixo real positivo, um ângulo de amplitude $\frac{3\pi}{4}$

Então, o conjunto definido pela condição $1 \leq |z - 2i| \leq 3 \wedge \frac{\pi}{4} < Arg(z - 2i) < \frac{3\pi}{4}$ pode estar representado na opção A

Resposta: (A)

11.2. se z_1 e z_2 são duas raízes consecutivas n-ésimas do complexo z, então
os argumentos destes dois números complexos estão em progressão aritmética de razão $\frac{2\pi}{n}$

Sendo assim, como são raízes consecutivas n-esimas, tem-se

$$\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{n} = \frac{13\pi}{20}$$

então,

$$\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{n} = \frac{13\pi}{20} \Leftrightarrow \frac{2\pi}{n} = \frac{13\pi}{20} - \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{2\pi}{n} = \frac{8\pi}{20} \Leftrightarrow n = 5$$

Ou seja, z_1 e z_2 são duas raízes quintas, consecutivas do complexo z

Assim,

o complexo $z = (z_2)^5 = \left(2e^{i\left(\frac{13\pi}{20}\right)}\right)^5 = 2^5 e^{i\left(\frac{65\pi}{20}\right)} = 32e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}$

12. Sabemos que $f(x) = b + \sqrt{-x - a}$

Assim, $g(x) = f(-x) = b + \sqrt{x - a}$

Coordenadas dos vértices do trapézio

Ponto A

$g(a) = b + \sqrt{a-a} = b + 0 = b$

Logo, $A(a; b)$

Ponto D

$g(a+1) = b + \sqrt{a+1-a} = b + 1$

Logo, $D(a+1; b+1)$

Ponto B é simétrico do ponto A em relação ao eixo Oy

Logo, $B(-a; b)$

Ponto C é simétrico do ponto D em relação ao eixo Oy

Logo, $C(-a-1; b+1)$

Assim,

Base menor do trapézio

$\overline{AB} = |a - (-a)| = |a + a| = |2a| = 2a$, visto que $a > 0$

Base maior do trapézio

$\overline{CD} = |a + 1 - (-a-1)| = |a + 1 + a + 1| = |2a + 2| = 2a + 2$, visto que $a > 0$

Altura do trapézio:

$|ordenada \quad de \quad D - ordenada \quad de \quad A| = |b + 1 - b| = 1$

Portanto,

$$A_{[ABCD]} = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} \times 1 = \frac{2a + 2a + 2}{2} = \frac{4a + 2}{2} = 2a + 1$$

Resposta: (D)

13. .

13.1. Calculemos a função derivada de f

$f'(x) = (xe^x - e^x)' = 1e^x + xe^x - e^x = xe^x$

Seja m o declive da reta tangente

$m = f'(2) = 2e^2 = 2e^2$

Ponto de tangência I

$f(2) = 2e^2 - e^2 = e^2$

Então, $I(2; e^2)$

Assim sendo,

$r : y = 2e^2x + b$, com $b \in \mathbb{R}$

Como a reta "passa" no ponto I, vem,

$e^2 = 2e^2 \times 2 + b \Leftrightarrow b = -3e^2$

Logo,

$r : y = 2e^2x - 3e^2$

13.2. $f(x) = xe^x - e^x$

A função derivada de f é $f'(x) = xe^x$

Calculemos a função segunda derivada de f

$f''(x) = (xe^x)' = e^x + xe^x = e^x(x + 1)$

Zeros de $f''(x)$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \vee e^x = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Quadro de sinal de $f''(x)$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$
e^x	$+$	$+$	$+$
f''	$-$	0	$+$
f	$\frown$	$-\frac{2}{e}$	$\smile$

Cálculos auxiliares

$f(-1) = -e^{-1} - e^{-1} = -2e^{-1} = -\frac{2}{e}$

O gráfico da função f tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty; -1]$, tem a concavidade voltada para cima em $[-1; +\infty[$, e tem um ponto de inflexão de coordenadas $I\left(-1; -\frac{2}{e}\right)$

13.3. A função f é contínua em $\mathbb{R}$, em particular, é contínua em $[0; 1]$

Assim, a função g é contínua em $[0; 1]$, por se tratar da soma de duas funções contínuas

Por outro lado

$g(0) = -1 + f(0) = -1 + 0 \times e^0 - e^0 = -2 < 0$

$g(1) = -1 + f(2) = -1 + 2 \times e^2 - e^2 = e^2 - 1 > 0$

Como a função g é contínua em $[0; 1]$ e $g(0) \times g(1) < 0$, então, pelo corolário do teorema de Bolzano, existe pelo pelo menos um zero da função g em $]0; 1[$

14. .

14.1. Sabemos que o ponto A pertence ao eixo Oy, logo, é da forma $(0; y; 0)$, com $y \in \mathbb{R}$

Como pertence à reta AV, vem,

$(0; y; 0) = (0, -2a, 10a) + k(0, -4a, 10a) \Leftrightarrow 0 = 0 \wedge y = -2a - 4ak \wedge 0 = 10a + 10ak \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = -2a - 4ak \wedge k = -1 \Leftrightarrow y = -2a + 4a \wedge k = -1 \Leftrightarrow y = 2a \wedge k = -1$

Logo, $A(0; 2a; 0)$

Determinemos os vetores $\overrightarrow{AV}$ e $\overrightarrow{BV}$

$\overrightarrow{AV} = V - A = (0; 0; 5a) - (0; 2a; 0) = (0; -2a; 5a)$

$\overrightarrow{BV} = V - B = (0; 0; 5a) - \left(\frac{3}{2}a; \frac{3}{2}a; 0\right) = \left(-\frac{3}{2}a; -\frac{3}{2}a; 5a\right)$

Calculemos o produto escalar entre estes dois vetores

$\overrightarrow{AV} \cdot \overrightarrow{BV} = 0 \times \left(-\frac{3}{2}a\right) - 2a \times \left(-\frac{3}{2}a\right) + 5a \times 5a = 3a^2 + 25a^2 = 28a^2$

Calculemos as normas destes dois vetores

$||\overrightarrow{AV}|| = \sqrt{0^2 + (-2a)^2 + (5a)^2} = \sqrt{0 + 4a^2 + 25a^2} = \sqrt{29a^2} = \sqrt{29}a$, visto que $a > 0$

$||\overrightarrow{BV}|| = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}a\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}a\right)^2 + (5a)^2} = \sqrt{\frac{9}{4}a^2 + \frac{9}{4}a^2 + 25a^2} = \sqrt{\frac{118}{4}a^2} = \frac{\sqrt{118}}{2}a$, visto que $a > 0$

Seja α, a amplitude do ângulo BVA

assim,

$$\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{AV} \cdot \overrightarrow{BV}}{||\overrightarrow{AV}|| \times ||\overrightarrow{BV}||} = \frac{28a^2}{\sqrt{29}a \times \frac{\sqrt{118}}{2}a} = \frac{56a^2}{\sqrt{3422}a^2} = \frac{56}{\sqrt{3422}}$$

Portanto,

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{56}{\sqrt{3422}}\right) \approx 16.8^\circ$$

Resposta: (C)

14.2. Sabemos que:

$A(0; 2a; 0)$
$B\left(\frac{3}{2}a; \frac{3}{2}a; 0\right)$
$\overrightarrow{AD} = (0, 0; 4a)$
$\overrightarrow{CD} = (0, -4a; 0)$

Ora, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = (0; 0; 4a) + (0; 4a; 0) = (0; -2a; 4a)$
$\overrightarrow{AB} = B - A = \left(\frac{3}{2}a; \frac{3}{2}a; 0\right) - (0; 2a; 0) = \left(\frac{3}{2}a; -\frac{1}{2}a; 0\right)$

Determinemos uma equação do plano ABC
Seja $\overrightarrow{\alpha}(b; c; d)$, um vetor normal ao plano ABC

Assim,

$\overrightarrow{\alpha} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \wedge \overrightarrow{\alpha} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

$\Leftrightarrow (b; c; d) \cdot \left(\frac{3}{2}a; -\frac{1}{2}a; 0\right) = 0 \wedge (b; c; d) \cdot (0; -4a; 4a) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{3}{2}ab - \frac{1}{2}ac = 0 \wedge -4ac + 4ad = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3b - c = 0 \wedge -c + d = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b = \frac{1}{3}c \wedge d = c$

Logo,

$\overrightarrow{\alpha}\left(\frac{1}{3}c; c; c\right)$, com $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, é uma família de vetores normais ao plano ABC

Tomando $c = 3$, vem, $\overrightarrow{\alpha}(1; 3; 3)$

assim, $ABC : 1x + 3y + 3z + d = 0, d \in \mathbb{R}$, ou seja, $ABC : x + 3y + 3z + d = 0, d \in \mathbb{R}$

Como $A\,(0, 2a; 0)$ é um ponto deste plano, vem,

$0 + 3 \times 2a + 3 \times 0 + d = 0 \Leftrightarrow 6a + d = 0 \Leftrightarrow d = -6a$

Logo, $ABC : x + 3y + 3z - 6a = 0$, com $a > 0$