



2^a Fase | setembro de 2020

12.^º Ano de Escolaridade

1. .

- 1.1.** Um vetor normal ao plano poderá ser um vetor diretor da reta AE , dado que a reta AE é perpendicular ao plano EFG

Assim, $\vec{\alpha} = (3; -6; 2) \mapsto$ vetor normal ao plano EFG

Portanto,

$$EFG : 3x - 6y + 2z + d = 0, d \in \mathbb{R}$$

Como G é ponto do plano EFG , resulta que,

$$3 \times 5 - 6 \times 3 + 2 \times 6 + d = 0 \Leftrightarrow 15 - 18 + 12 + d = 0 \Leftrightarrow d = -9$$

Concluindo,

$$EFG : 3x - 6y + 2z - 9 = 0$$

- 1.2.** O centro da superfície esférica é o centro do cubo, pelo que é o ponto médio do segmento $[AG]$

Seja M esse ponto

$$M\left(\frac{7+5}{2}; \frac{1+3}{2}; \frac{4+6}{2}\right), \text{ ou seja, } M(6; 2; 5)$$

O raio da superfície esférica é $\overline{AM} = \sqrt{(7-6)^2 + (1-2)^2 + (4-5)^2} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$

Assim, a equação reduzida da superfície esférica é $(x-6)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 = (\sqrt{3})^2$, ou seja,

$$(x-6)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 = 3$$

2. Número de casos possíveis: ${}^8C_3 = 56$

Número de casos favoráveis: ${}^4C_3 \times 6 = 24$

Portanto, a probabilidade pedida é $P = \frac{{}^4C_3 \times 6}{{}^8C_3} = \frac{24}{56} = \frac{3}{7}$

Resposta: (B)

3. $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0.9 \Leftrightarrow P(\overline{A \cap B}) = 0.9 \Leftrightarrow 1 - P(A \cap B) = 0.9 \Leftrightarrow P(A \cap B) = 1 - 0.9 \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0.1$

$$P(A \cap (A \cup B)) = P((A \cup \emptyset) \cap (A \cup B)) = P(A \cup (B \cap \emptyset)) = P(A \cup \emptyset) = P(A) = 0.3$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.3 + 0.4 - 0.1 = 0.6$$

Assim,

$$P(A | (A \cup B)) = \frac{P(A \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(A)}{P(A \cup B)} = \frac{0.3}{0.6} = \frac{1}{2}$$

4. Há dois casos a considerar

1º caso:

1

O primeiro algarismo é fixo

Para o segundo algarismo há quatro opções (0, ou 1, ou 2, ou 3)

O mesmo acontecendo para os restantes algarismos

Assim, existem $4^4 = 256$ números nestas condições

2º caso:

2

O primeiro algarismo é fixo

Para o segundo algarismo há duas opções (0 ou 1)

Para o terceiro algarismo há quatro opções (0, ou 1, ou 2, ou 3)

O mesmo acontecendo para os restantes algarismos

Assim, existem $4^3 \times 2 = 128$ números nestas condições

Concluindo,

Existem $256 + 128 = 384$ números nas condições desejadas

Resposta: (C)

5. Sejam a e b os dois números

$$\text{Ora, } \log_8(a) + \log_8(b) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \log_8(ab) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow ab = 8^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow ab = \sqrt[3]{8} \Leftrightarrow ab = 2$$

Resposta: (A)

6. Seja r , a razão da progressão

Ora,

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} u_7 = 2u_2 \\ \frac{u_1 + u_{12}}{2} \times 12 = 57 \end{array} \right. &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} u_1 + 6r = 2(u_1 + r) \\ \frac{u_1 + u_1 + 11r}{2} \times 12 = 57 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 6r - 2r = u_1 \\ 12u_1 + 66r = 57 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4r = u_1 \\ 12u_1 + 66r = 57 \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4r = u_1 \\ 48r + 66r = 57 \end{array} \right. &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4r = u_1 \\ 114r = 57 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4r = u_1 \\ r = \frac{1}{2} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} u_1 = 2 \\ r = \frac{1}{2} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Logo,

$$u_n = 2 + (n - 1) \times \frac{1}{2} \Leftrightarrow u_n = 2 + \frac{1}{2}n - \frac{1}{2} \Leftrightarrow u_n = \frac{1}{2}n + \frac{3}{2}$$

Procuremos o número natural n , tal que $u_n = 500$

$$u_n = 500 \Leftrightarrow \frac{1}{2}n + \frac{3}{2} = 500 \Leftrightarrow n + 3 = 1000 \Leftrightarrow n = 997$$

Resposta: 997

7. Analisando as opções, tem-se que:

$$\lim(v_n) = \lim\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{+\infty} = 1 + 0 = 1$$

Pelo que a sucessão (v_n) é convergente

Analizando a monotonia da sucessão, verificamos que:

$$v_1 < v_2 < v_3 < \dots < v_9$$

Ora, como,

$$v_9 = 9 \text{ e } v_{10} = 1 + \frac{1}{10} = \frac{11}{10}$$

então, $v_9 > v_{10}$

Logo, a sucessão (v_n) é não monótona

A opção A é falsa

A opção B é falsa

A opção C é verdadeira

A opção D é falsa

Resposta: (C)

8. .

8.1. Ora,

$$i^5 = i^{4 \times 1 + 1} = i^4 \times i = 1 \times i = i$$

$$z_1 = \frac{2}{1-i} + \frac{4}{i^5} = \frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)} + \frac{4}{i} = \frac{2+2i}{1-i^2} + \frac{4i}{i^2} = \frac{2+2i}{2} + \frac{4i}{-1} = 1+i - 4i = 1-3i$$

$$|z_1| = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$$

Seja $z_1 \times z_2 = a + ai$, com $a > 0$

Ora,

$$|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2| = \sqrt{10} \times \sqrt{5} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$\text{Logo, } \sqrt{a^2 + a^2} = 5\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2a^2} = 5\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}|a| = 5\sqrt{2} \Leftrightarrow |a| = 5 \Leftrightarrow a = 5$$

Então,

$$z_1 \times z_2 = 5 + 5i$$

Assim,

$$\begin{aligned} z_1 \times z_2 = 5 + 5i &\Leftrightarrow (1 - 3i) \times z_2 = 5 + 5i \Leftrightarrow z_2 = \frac{5 + 5i}{1 - 3i} \Leftrightarrow z_2 = \frac{(5 + 5i)(1 + 3i)}{(1 - 3i)(1 + 3i)} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow z_2 = \frac{5 + 15i + 5i + 15i^2}{1^2 - (3i)^2} \Leftrightarrow z_2 = \frac{-10 + 20i}{10} \Leftrightarrow z_2 = -1 + 2i \end{aligned}$$

Observação:

Sendo, $w_1 = a + bi$ e $w_2 = c + di$

Tem-se que, $|w_1 \times w_2| = |w_1| \times |w_2|$

Com efeito,

$$|w_1| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$|w_2| = \sqrt{c^2 + d^2}$$

$$w_1 \times w_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Assim,

$$\begin{aligned} |w_1| \times |w_2| &= \sqrt{a^2 + b^2} \times \sqrt{c^2 + d^2} = \sqrt{(ac)^2 + (ad)^2 + (bc)^2 + (bd)^2} \\ |w_1 \times w_2| &= \sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2} = \sqrt{(ac)^2 + (bd)^2 - 2abcd + (ad)^2 + (bc)^2 + 2abcd} = \\ &= \sqrt{(ac)^2 + (ad)^2 + (bc)^2 + (bd)^2} \end{aligned}$$

Portanto,

$$|w_1 \times w_2| = |w_1| \times |w_2|$$

8.2. Se $k + i$ é uma das raízes quadradas do número complexo $3 - 4i$, então deverá ter-se, $(k + i)^2 = 3 - 4i$

$$\begin{aligned} (k + i)^2 = 3 - 4i &\Leftrightarrow k^2 + 2ki + i^2 = 3 - 4i \Leftrightarrow k^2 + 2ki - 1 = 3 - 4i \Leftrightarrow k^2 - 1 + 2ki = 3 - 4i \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow k^2 - 1 = 3 \wedge 2k = -4 \Leftrightarrow k^2 = 4 \wedge 2k = -4 \Leftrightarrow k = \pm 2 \wedge k = -2 \Leftrightarrow k = -2 \end{aligned}$$

Em alternativa, poderíamos testar os valores das opções

Opção A

$$k = 2 \mapsto (2 + i)^2 = 3 - 4i$$

$$\therefore 4 + 4i + i^2 = 3 - 4i$$

$$\therefore 4 + 4i - 1 = 3 - 4i$$

$$\therefore 3 + 4i = 3 - 4i \text{ (Falso)}$$

Opção B

$$k = 1 \mapsto (1 + i)^2 = 3 - 4i$$

$$\therefore 1 + 2i + i^2 = 3 - 4i$$

$$\therefore 1 + 2i - 1 = 3 - 4i$$

$$\therefore 2i = 3 - 4i \text{ (Falso)}$$

Opção C

$$k = -1 \mapsto (-1 + i)^2 = 3 - 4i$$

$$\therefore 1 - 2i + i^2 = 3 - 4i$$

$$\therefore 1 - 2i - 1 = 3 - 4i$$

$$\therefore -2i = 3 - 4i \text{ (Falso)}$$

Opção D

$$k = -2 \mapsto (-2 + i)^2 = 3 - 4i$$

$$\therefore 4 - 4i + i^2 = 3 - 4i$$

$$\therefore 4 - 4i - 1 = 3 - 4i$$

$$\therefore 3 - 4i = 3 - 4i \text{ (Verdadeiro)}$$

Resposta: (D)

9. .

9.1. Se $r = \frac{3}{5}R$, então, $\frac{r}{R} = \frac{3}{5}$

Assim, percentagem da área da superfície terrestre coberta por um satélite é,

$$50 \times \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2}\right) = 50 \times \left(1 - \sqrt{1 - \frac{9}{25}}\right) = 50 \times \left(1 - \sqrt{\frac{16}{25}}\right) = 50 \times \left(1 - \frac{4}{5}\right) = \\ = 50 \times \left(\frac{1}{5}\right) = 10\%$$

Resposta: (C)

9.2. Raio da Terra: 6400km

Se $h = r$, tem-se que $r = \frac{R}{r+R}\sqrt{r^2 + 2rR}$, ou seja, $r = \frac{6400}{r+6400}\sqrt{r^2 + 12800r}$

Procuremos o valor de r na equação $r = \frac{6400}{r+6400}\sqrt{r^2 + 12800r}$

Inserir as funções:

$$y_1 = \frac{6400}{r+6400}\sqrt{r^2 + 12800r}$$

$$y_2 = r$$

Ajustar a janela de visualização:
[0; 7000] × [0; 7000]

Procurar a abscissa do ponto de interseção dos gráficos das funções y_1 e y_2

Ponto de interseção: $A(5371.44; 5371.44)$

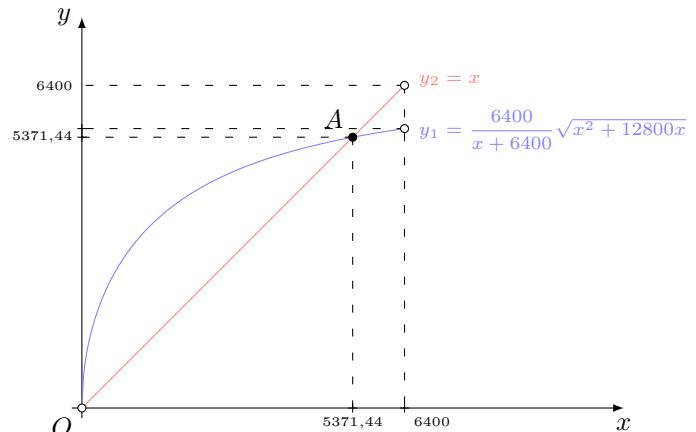


Figura 1

Assim, a percentagem da área da superfície terrestre coberta por um satélite é,

$$50 \times \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{5371.44}{6400}\right)^2}\right) \approx 23\%$$

10. .

10.1. $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = [\cos(x)]^2 = \cos^2(x)$

Determinemos a função derivada desta função

$$(f \circ g)'(x) = 2 \cos(x)(-\sin(x)) = -2 \sin(x) \cos(x) = -\sin(2x)$$

Assim, o declive da reta tangente é $m = (f \circ g)' \left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sin \left(\frac{2\pi}{4}\right) = -\sin \left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$

Resposta: (B)

10.2. Seja h , a função definida em $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ por $h(x) = f(x) - g(x)$

Ora,

- a função h é contínua em $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$, por se tratar de diferença de funções contínuas
- $h(0) = f(0) - g(0) = 0 - 1 = -1 < 0$

$$h\left(\frac{\pi}{3}\right) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) - g\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi^2}{9} - \frac{1}{2} \approx 0.597 > 0$$

Como $h(0) \times h\left(\frac{\pi}{3}\right) < 0$ e a função h é contínua em $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$, então, pelo Corolário do Teorema de Bolzano, a função h tem pelo menos um zero em $\left]0; \frac{\pi}{3}\right[$

Ou seja, a equação $f(x) - g(x) = 0$ tem pelo menos um zero em $\left]0; \frac{\pi}{3}\right[$

Concluindo, a equação $f(x) = g(x)$ tem pelo menos um zero em $\left]0; \frac{\pi}{3}\right[$

11. .

11.1. $1 \in D_g$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (1 + xe^{x-1}) = 1 + 1 \times e^0 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sin(x-1)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}}{\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sin(x-1)}{x-1}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}}{\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sin(x-1)}{x-1}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(\sqrt{x})^2 - 1^2}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}}{\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sin(y)}{y}} = \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x|-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}}{1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar:

Fez-se a mudança de variável:

$$y = x - 1 \Leftrightarrow x = y + 1$$

Nota: Utilizou-se o limite notável

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Se $x \rightarrow 1^+$, então, $y \rightarrow 0^+$

Como, $\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} h(x)$, então, não existe $\lim_{x \rightarrow 1} h(x)$

Logo, a função h não é contínua para $x = 1$

11.2. Calculemos $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + xe^{x-1}) = 1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^{x-1}) = 1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{e^{1-x}} \right) = 1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{ee^{-x}} \right) = \\ &= 1 + \frac{1}{e} \times \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{e^{-x}} \right) = 1 + \frac{1}{e} \times \frac{1}{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{-y}} = 1 - \frac{1}{e} \times \frac{1}{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y}} = 1 - \frac{1}{e} \times \frac{1}{+\infty} = 1 - 0 = 1 \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar:

Fez-se a mudança de variável:

$$y = -x \Leftrightarrow x = -y$$

Se $x \rightarrow -\infty$, então, $y \rightarrow +\infty$

Utilizou-se o limite notável: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

Logo, o gráfico da função h admite uma assíntota horizontal de equação $y = 1$

12. .

12.1. Determinemos a função segunda derivada de f

$$f''(x) = \left(\frac{2 + \ln(x)}{x} \right)' = \frac{\frac{1}{x} \times x - (2 + \ln(x)) \times 1}{x^2} = \frac{1 - 2 - \ln(x)}{x^2} = \frac{-1 - \ln(x)}{x^2}$$

Zeros da função segunda derivada

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{-1 - \ln(x)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow -1 - \ln(x) = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ln(x) = -1 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = e^{-1} \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar:

Quadro de sinal de $f''(x)$

x	0		$\frac{1}{e}$	$+\infty$
x^2	////	+	+	+
$-1 - \ln(x)$	////	+	0	-
$f''(x)$	////	+	0	-
$f(x)$	////	-	e	-

- $-1 - \ln(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) < -1 \wedge x > 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x < e^{-1} \wedge x > 0 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{e}$
- $-1 - \ln(x) < 0 \Leftrightarrow \ln(x) > -1 \wedge x > 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x > e^{-1} \wedge x > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{e}$

Cálculo auxiliar:

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{2 + \ln\left(\frac{1}{e}\right)}{\frac{1}{e}} = \frac{2 - 1}{\frac{1}{e}} = \frac{1}{\frac{1}{e}} = e$$

O gráfico da função f tem a concavidade voltada para cima em $\left]0; \frac{1}{e}\right]$ e a concavidade voltada para baixo em $\left[\frac{1}{e}; +\infty\right[$

A abscissa do ponto de inflexão do gráfico é $\frac{1}{e}$

$$\begin{aligned} \text{12.2. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{1 - x^2} &= - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{(x - 1)(x + 1)} = - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x + 1} = -f'(1) \times \frac{1}{2} = \\ &= -2 \times \frac{1}{2} = -1 \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$f'(1) = \frac{2 + \ln(1)}{1} = \frac{2 + 0}{1} = 2$$

Reposta: (B)