OmegaMat

Resolução do Exame Modelo XI de Matemática A

Duração do Exame: 150 **minutos** + 30 **minutos de tolerância** | **setembro de 2020**

12.º Ano de Escolaridade

1. Comecemos por calcular $\lim(a_n)$

$$\lim(a_n) = \lim\left[1-\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n\right] = 1-\lim\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n = 1-\lim\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^n =$$

$$= 1-\lim\left(1+\frac{-1}{n}\right)^n \times \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1-e^{-1}\times e = 1-e^0 = 1-1 = 0$$

Sabemos que:

$a_1 = 1$

$a_n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$

$\lim(a_n) = 0^+$

Assim,

$$\lim(f(a_n)) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{x+1}-e}{x} =^{\left(\frac{0}{0}\right)} \lim_{x\to 0^+}\frac{e^x e - e}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{e\left(e^x-1\right)}{x} =$$

$$= e\times \lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{x} = e\times 1 = e$$

Nota: Utilizou-se o limite notável $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x-1}{x} = 1$

Resposta: **(B)**

2. .

2.1. Suponhamos que o trio é constituído por três ases

Fazendo um esquema

$\underline{A_1}\quad \underline{A_2}\quad \underline{A_3}\quad \underline{\cdots}$

Para esta situação temos ${}^4C_3$ maneiras distintas de escolher os três ases
Para cada uma destas maneiras, temos 48 escolhas para a quarta carta (visto que às 52 cartas do baralho temos de retirar os três ases que saíram e também o outro às que falta - Esta carta não pode ser um às)

Então ${}^4C_3 \times 48$ é o número de combinações possíveis para se formar um trio de ases

Raciocinando da mesma maneira para os restantes tipos de trios, tem-se que o número de combinações de cartas que o Rodrigo pode ter recebido é ${}^4C_3 \times 48 \times 13 = 2496$

Resposta: **(C)**

2.2. A Marta recebeu quatro cartas, e sabe-se que recebeu um par

Então, o número de casos possíveis é $13 \times^4 C_2 \times^{48} C_1 \times^{44} C_1$

Quanto ao número de casos favoráveis:

Pretendemos que saiam, um às, dois reis e uma dama

Como no baralho há quatro ases, quatro reis e quatro damas, então, temos ${}^4C_1 \times^4 C_2 \times^4 C_1$ maneiras distintas de receber as cartas pretendidas

Portanto, a probabilidade pedida é $P = \dfrac{{}^4C_1 \times^4 C_2 \times^4 C_1}{13 \times^4 C_2 \times^{48} C_1 \times^{44} C_1} = \dfrac{1}{1716}$

3. Sabemos que, $P(B \mid \overline{A})$, representa a probabilidade saírem da caixa B duas bolas vermelhas, dado que a bola retirada da caixa A é azul

Ora, se da caixa A saiu uma bola azul e esta bola foi colocada na caixa B, então a caixa B passou a ter $n + 10$ bolas, sendo n vermelhas e 10 azuis

Assim, como a seguir se retiram, de uma só vez, duas bolas da caixa, e se pretende que sejam vermelhas, então, essa probabilidade é dada por $\dfrac{{}^nC_2}{{}^{n+10}C_2}$

Mas, por hipótese, sabe-se que $P(B \mid \overline{A}) = \dfrac{1}{8}$

Logo,

$$P(B \mid \overline{A}) = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{{}^nC_2}{{}^{n+10}C_2} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{\dfrac{n!}{2!(n-2)!}}{\dfrac{(n+10)!}{2!(n+8)!}} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{2!n!(n+8)!}{2!(n+10)!(n-2)!} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)!(n+8)!}{(n+10)(n+9)(n+8)!(n-2)!} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{(n+10)(n+9)} - \frac{1}{8} = 0 \Leftrightarrow \frac{8n^2 - 8n - n^2 - 19n - 90}{8(n+10)(n+9)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{7n^2 - 27n - 90}{8(n+10)(n+9)} = 0 \Leftrightarrow 7n^2 - 27n - 90 = 0 \wedge 8(n+10)(n+9) \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{27 \pm \sqrt{(-27)^2 - 4 \times 7 \times (-90)}}{2 \times 7} \wedge n \neq -10 \wedge n \neq -9 \Leftrightarrow (n = 6 \vee n = -\frac{15}{7}) \wedge n \neq -10 \wedge n \neq -9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = 6 \vee n = -\frac{15}{7}$$

Como, $n \in \mathbb{N}$, então $n = 6$

Resposta: (D)

4. .

4.1. Teremos de resolver a equação $g(x) = f(x)$, no intervalo $]0; 2\pi[$

Ora,

$$g(x) = f(x) \Leftrightarrow e^{\sin(2x)} = e^{\sin(x)} \Leftrightarrow \sin(2x) = \sin(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = x + k2\pi \vee 2x = \pi - x + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = k2\pi \vee 3x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = k2\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

Atribuindo valores a k, vem,

$k=0 \mapsto x=0 \vee x=\frac{\pi}{3}$

$k=1 \mapsto x=2\pi \vee x=\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}$

$\therefore x=2\pi \vee x=\pi$

$k=2 \mapsto x=4\pi \vee x=\frac{\pi}{3}+\frac{4\pi}{3}$

$\therefore x=4\pi \vee x=\frac{5\pi}{3}$

$k=3 \mapsto x=6\pi \vee x=\frac{\pi}{3}+\frac{6\pi}{3}$

$\therefore x=6\pi \vee x=\frac{7\pi}{3}$

$k=-1 \mapsto x=-2\pi \vee x=\frac{\pi}{3}-\frac{2\pi}{3}$

$\therefore x=-2\pi \vee x=-\frac{\pi}{3}$

Concluímos, assim, que as soluções da equação, no intervalo $]0;2\pi[$, são:

$\frac{\pi}{3}$; π e $\frac{5\pi}{3}$

Portanto,

A abcissa (a) do ponto A é $\frac{\pi}{3}$

A abcissa (b) do ponto B é π

A abcissa (c) do ponto C é $\frac{5\pi}{3}$

4.2. Determinemos as funções, f' e g', derivadas de f e de g, respetivamente

$f'(x)=\cos(x)e^{\sin(x)}$ e $g'(x)=2\cos(2x)e^{\sin(2x)}$

Assim,

$f'(a)\times g'(a)=\cos(a)e^{\sin(a)}\times 2\cos(2a)e^{\sin(2a)}=2\cos(a)\cos(2a)e^{\sin(a)+\sin(2a)}$

Pretende-se resolver a equação $f'(a)\times g'(a)=-1$

Inserir as funções:

$y_1=2\cos(a)\cos(2a)e^{\sin(a)+\sin(2a)}$

$y_2=-1$

Ajustar a janela de visualização: $[0;2\pi]\times[-4;4]$

Desenhar os gráficos das duas funções

Procurar as abcissas dos pontos de interseção dos dois gráficos

$A(0.85;-1)$; $B(1.42;-1)$; $C(2.77;-1)$; $D(3.71;-1)$

Obtém-se: $a\approx 0.85\ rad$, $a\approx 1.42\ rad$, $a\approx 2.77\ rad$ e $a\approx 3.71\ rad$

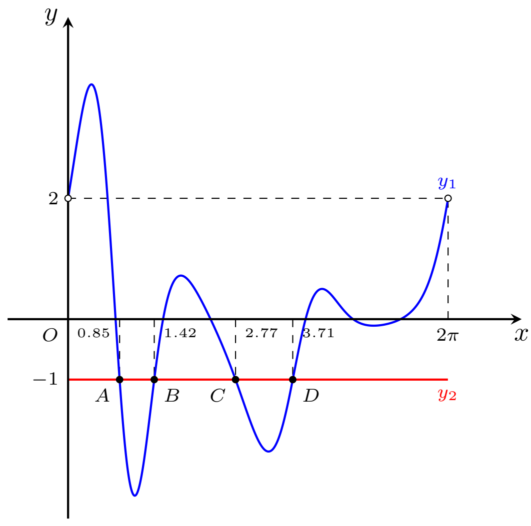

Figura 1

5. Ora, $u_n = \frac{2n+1}{n+2} = \frac{2n+4-3}{n+2} = \frac{2(n+2)-3}{n+2} = \frac{2(n+2)}{n+2} - \frac{3}{n+2} = 2 - \frac{3}{n+2}$

$n \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}$
$\therefore n+2 \geq 3, \forall_{n\in\mathbb{N}}$
$\therefore \frac{1}{n+2} \leq \frac{1}{3}, \forall_{n\in\mathbb{N}}$
Por outro lado, a sucessão de termo geral $\frac{1}{n+2}$ tem os termos todos positivos, assim,
$0 < \frac{1}{n+2} \leq \frac{1}{3}, \forall_{n\in\mathbb{N}}$
$\therefore 0 > -\frac{1}{n+2} \geq -\frac{1}{3}, \forall_{n\in\mathbb{N}}$
$\therefore -\frac{1}{3} \leq -\frac{1}{n+2} < 0, \forall_{n\in\mathbb{N}}$
$\therefore -1 \leq -\frac{3}{n+2} < 0, \forall_{n\in\mathbb{N}}$
$\therefore 2-1 \leq 2-\frac{3}{n+2} < 0+2, \forall_{n\in\mathbb{N}}$
$\therefore 1 \leq 2-\frac{3}{n+2} < 2, \forall_{n\in\mathbb{N}}$
$\therefore 1 \leq u_n < 2, \forall_{n\in\mathbb{N}}$ c.q.d.

Como o conjunto dos termos da sucessão (u_n) admite majorante (2) e minorante (1), a sucessão é limitada

6. .

6.1. Como a circunferência tem raio 1, então

$B(\cos(x); \sin(x))$, com, $\cos(x) < 0$ e $\sin(x) > 0$

Sendo T, a projeção ortogonal do ponto A sobre o eixo Oy, tem-se que $T(0; \sin(x))$

Assim,

$\overline{AB} = 2|\cos(x)| = -2\cos(x)$, visto que, $\cos(x) < 0$

$\overline{AD} = 2|\sin(x)| = 2\sin(x)$, visto que, $\sin(x) > 0$

$\overline{FT} = 1 - |\sin(x)| = 1 - \sin(x)$, visto que, $\sin(x) > 0$

Portanto, a área da região colorida é

$A_{regiaocolorida} = \pi \times 1^2 - 2 \times A_{[ABF]} - A_{[ABCD]} = \pi - 2 \times \frac{\overline{AB} \times \overline{FT}}{2} - \overline{AB} \times \overline{CD} =$

$= \pi - \overline{AB} \times \overline{FT} - \overline{AB} \times \overline{CD} = \pi - (-2\cos(x)) \times (1 - \sin(x)) - (-2\cos(x)) \times 2\sin(x) =$

$= \pi + 2\cos(x) - 2\cos(x) \times \sin(x) + 4\cos(x) \times \sin(x) =$

$= \pi + 2\cos(x) + 2\cos(x) \times \sin(x) =$

$= \pi + 2\cos(x) + \sin(2x)$

Logo, a área A, da região colorida da figura, é dada, em função de x, por

$$A(x) = \pi + 2\cos(x) + \sin(2x)$$

6.2. Ora,

$$\lim_{x\to\pi^-} A(x) = \lim_{x\to\pi^-}(\pi + 2\cos(x) + \sin(2x)) =$$

$$= \pi + 2\cos(\pi) + \sin(2\pi) = \pi - 2$$

Este valor representa a área de uma região colorida, quando x está muito próximo de π

Geometricamente, quando $x \to \pi^-$, a região colorida tende para o que se observa na figura ao lado
O polígono $[EFGH]$ é um quadrado de lado $\sqrt{2}$

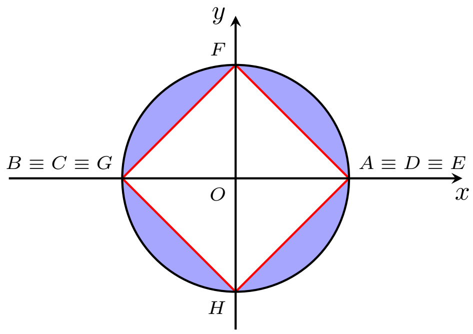

Figura 2

7. A condição $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP} = 0$ define uma superfície esférica de diâmetro $[AB]$

$\overrightarrow{AP} = P - A = (x-a; y-0; z-0) = (x-a; y; z)$

$\overrightarrow{BP} = P - B = (x-0; y-a; z-0) = (x; y-a; z)$

Assim,

$$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP} = 0 \Leftrightarrow (x-a;y;z)\cdot(x;y-a;z) = 0 \Leftrightarrow x(x-a)+y(y-a)+z^2 = 0 \Leftrightarrow x^2-ax+y^2-ay+z^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{a}{2}\right)^2 + z^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{a}{2}\right)^2 + z^2 = \frac{a^2}{2}$$

Outro processo

Centro da superfície esférica: $M\left(\frac{a+0}{2}; \frac{0+a}{2}; \frac{0+0}{2}\right)$, ou seja, $M\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; 0\right)$

Raio da superfície esférica: $r = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{\sqrt{(a-0)^2+(0-a)^2+(0-0)^2}}{2} = \frac{\sqrt{2a^2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}|a| = \frac{\sqrt{2}}{2}a$

Assim, uma equação da superfície esférica é,

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{a}{2}\right)^2 + z^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2$$

Ou seja,

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{a}{2}\right)^2 + z^2 = \frac{a^2}{2}$$

Resposta: (C)

8. .

8.1. Determinemos o declive da reta r

$$m_r = \frac{1-0}{0-1} = -1$$

Logo,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$$

Assim,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{f(x)} = 2 \times \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{f(x)}{x}} = 2 \times \frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}} = 2 \times \frac{1}{-1} = -2$$

Resposta: (A)

8.2. Determinemos a função derivada de g

$$g'(x) = \left(2\ln(x) - x^2\right)' = 2 \times \frac{1}{x} - 2x = \frac{2-2x^2}{x}$$

Procuremos os zeros de g'

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2-2x^2}{x} = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow 2 - 2x^2 = 0 \wedge \wedge x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 1 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = \pm 1 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Quadro de sinal de g'

x	0		1	$+\infty$
$2-2x^2$	$\backslash\backslash\backslash$	$+$	0	$-$
x	$\backslash\backslash\backslash$	$+$	$+$	$+$
$g'(x)$	$\backslash\backslash\backslash$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\backslash\backslash\backslash$	$\nearrow$	0	$\searrow$

$$g(1) = 2 \times \ln(1) - 1^2 = 0 - 1 = -1$$

A função g é estritamente crescente em $]0;1]$ e é estritamente decrescente em $[1;+\infty[$

Atinge o valor máximo absoluto -1, para $x = 1$

9. .

9.1. Sabemos que $z = e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$

Assim,

$$w = z^{-2} \times \overline{z} \times (-z) = \left(\frac{1}{z}\right)^2 \times \overline{z} \times (-z) = \left(e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}\right)^2 \times e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)} \times e^{i\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)} = e^{i\left(-\frac{2\pi}{4}\right)} \times e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)} \times e^{i\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)} =$$

$$= e^{i\left(-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \pi + \frac{\pi}{4}\right)} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)} = i$$

Ora, $w^n = i^n$

Para que w^n seja um número real, n tem de ser par

Assim, o menor valor de n para o qual w^n é um número real é 2
Resposta: (C)

9.2. Comecemos por resolver a equação $z^4 - 16 = 0$

$$z^4 - 16 = 0 \Leftrightarrow z^4 = 16 \Leftrightarrow z = \sqrt[4]{16} \Leftrightarrow z = \sqrt[4]{16e^{i(0)}} \Leftrightarrow z = \sqrt[4]{16}e^{i\left(\frac{0+k2\pi}{4}\right)},\ k \in \{0;1;2;3\}$$

$$\Leftrightarrow z = 2e^{i\left(\frac{k\pi}{2}\right)},\ k \in \{0;1;2;3\}$$

Atribuindo valores a k, vem,

$k = 0 \mapsto z = 2e^{i(0)} = 2$

$k = 1 \mapsto z = 2e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 2i$

$k = 2 \mapsto z = 2e^{i\left(\frac{2\pi}{2}\right)} = 2e^{i(\pi)} = -2$

$k = 3 \mapsto z = 2e^{i\left(\frac{3\pi}{2}\right)} = -2i$

Os afixos das soluções desta equação são vértices de um quadrado inscrito numa circunferência de raio 2 e centrada na origem

Sejam, $A(2;0)$, $B(0;2)$, $C(-2;0)$ e $D(0;-2)$, esses afixos

Ora,

$\overline{AB} = \sqrt{(2-0)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Assim, a área do polígono é $A_{[ABCD]} = \overline{AB}^2 = (2\sqrt{2})^2 = 8\ u.a.$

Resposta: (C)

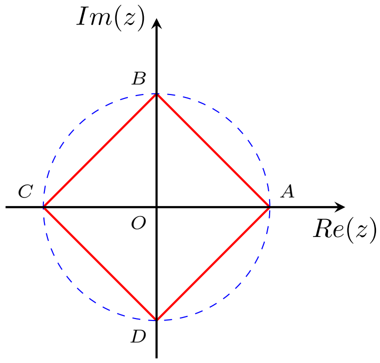

Figura 3

10. .

10.1. $0 \in D_f$

A função f é contínua em $x = 0$, se existir $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, ou seja,

se $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$

Ora,

- $$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{xe^{x+1}}{2\sin(x)}\right) =^{\left(\frac{0}{0}\right)} \left(\frac{\lim\limits_{x\to 0^-} e^{x+1}}{2\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin(x)}{x}}\right) = \frac{e}{2\times 1} = \frac{e}{2}$$

- $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{e^{x+1}-e}{\sqrt{x^3+4x^2}}\right) =^{\left(\frac{0}{0}\right)} \frac{\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{x+1}-e}{x}}{\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x^3+4x^2}}{x}} =$$

$$= \frac{e\times \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x-1}{x}}{\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{\dfrac{x^3+4x^2}{x^2}}} = e\times\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x+4}} = e\times\frac{1}{2} = \frac{e}{2}$$

- $f(0) = e^k$

Nota:

Aplicaram-se os **limites notáveis:**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$$

Assim, se $e^k = \dfrac{e}{2} \Leftrightarrow \dfrac{e^k}{e} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow e^{k-1} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow k-1 = \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) \Leftrightarrow k = 1-\ln(2)$,
a função f é contínua em $x = 0$

10.2. .

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{x+1}-e}{\sqrt{x^3+4x^2}}\right) =^{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)} \frac{\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x+1}-e}{x^2}}{\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^3+4x^2}}{x^2}} =$$

$$= \frac{e\times\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{x^2}}{\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^3+4x^2}{x^4}}} = e\times\frac{\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}-\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}}{\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}}} =$$

$$= e\times\frac{+\infty-0}{\sqrt{0+0}} = +\infty$$

Logo, o gráfico da função f não admite assíntota horizontal quando $x\to+\infty$

Nota:

Aplicou-se o **limite notável:**

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{x^p} = +\infty \ (p\in\mathbb{R})$

11. Um vetor diretor da reta r é $\overrightarrow{u}(-2;\sqrt{3})$

Assim, o declive da reta é $m_r = \frac{\sqrt{3}}{-2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Seja α a inclinação da reta r

Então,

$\alpha = \tan^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 180° \approx 139.1°$

Quanto à equação reduzida da reta

O declive da reta é $m_r = \frac{\sqrt{3}}{-2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Então,

$r: y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + b, b\in\mathbb{R}$

Como $A(1;-2)$ é ponto da reta, vem,

$-2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\times 1 + b \Leftrightarrow 2b = -4+\sqrt{3} \Leftrightarrow b = \frac{-4+\sqrt{3}}{2}$

Portanto,

A equação reduzida da reta r é $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{-4+\sqrt{3}}{2}$

12. Determinemos a função derivada da função g

$g'(x) = (2x+e^{-x})' = 2 - e^{-x}$

O declive da reta tangente é,

$m_t = g'(-2) = 2 - e^2$

A ordenada do ponto de tangência A, é,

$g(-2) = -4 + e^2$

Então,

$t: y = (2 - e^2)x + b, b \in \mathbb{R}$

Como $A(-2; -4 + e^2)$ é ponto da reta, vem,

$-4 + e^2 = (2 - e^2) \times (-2) + b \Leftrightarrow b = -4 + e^2 + 4 - 2e^2 \Leftrightarrow b = -e^2$

Portanto,

A equação reduzida da reta t é $y = (2 - e^2)x - e^2$

Resposta: (B)