



Duração do Exame: 150 minutos + 30 minutos de tolerância

12.º Ano de Escolaridade

$$\begin{aligned} 1. \lim ((a_n)^n) &= \lim \left(\frac{2n+1}{4n-2} \right)^n = \lim \left(\frac{2n \left(1 + \frac{1}{2n}\right)}{4n \left(1 - \frac{2}{4n}\right)} \right)^n = \lim \left(\frac{1}{2} \right)^n \times \frac{\lim \left(1 + \frac{1}{2n}\right)}{\lim \left(1 - \frac{1}{2n}\right)} = \\ &= \lim \left(\frac{1}{2} \right)^n \times \frac{\lim \left(1 + \frac{\frac{1}{2}}{n}\right)}{\lim \left(1 - \frac{\frac{1}{2}}{n}\right)} = 0 \times \frac{e^{\frac{1}{2}}}{e^{-\frac{1}{2}}} = 0 \end{aligned}$$

Resposta: (B)

2. Comecemos por escolher o lugar que fica vago na cabeceira da mesa

O número de maneiras distintas de fazer essa escolha é igual a 4C_1

Escolhido o lugar vago na cabeceira da mesa, sobram três lugares para colocar o João e a Joana

O número de maneiras distintas de fazer essa escolha é igual a ${}^3C_2 \times 2!$ ou 3A_2

Escolhido o lugar vago e os lugares da Joana e do João, coloquemos a Inês e a Beatriz

Colocar a Inês e Beatriz num lado da mesa: $4 \times 2!$

Colocar os restantes amigos nos nove lugares sobrantes: $9!$

Não esquecendo que a Inês e Beatriz podem ficar juntas no outro lado da mesa, tem-se que,

${}^4C_1 \times {}^3C_2 \times 2! \times 4 \times 2! \times 9! \times 2 = 139345920$ é o número de maneiras de sentar todos os amigos na mesa

3. .

$$P(\overline{B}) = \frac{3}{10}$$

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$$

$$\begin{aligned} P(\overline{A}|B) &= \frac{6}{7} \Leftrightarrow \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{6}{7} \Leftrightarrow \frac{P(\overline{A} \cap B)}{\frac{7}{10}} = \frac{6}{7} \Leftrightarrow P(\overline{A} \cap B) = \frac{6}{7} \times \frac{7}{10} \Leftrightarrow P(\overline{A} \cap B) = \frac{6}{10} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow P(\overline{A} \cap B) = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

Elaborando uma tabela de contingência

	A	\bar{A}	
B	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{7}{10}$
\bar{B}	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$
	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	1

$$P(A \cap B) = \frac{7}{10} - \frac{3}{5} = \frac{1}{10}$$

$$P(\overline{A \cup B}) = \frac{1}{5} \Leftrightarrow 1 - P(A \cup B) = \frac{1}{5} \Leftrightarrow 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) = \frac{1}{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A) = 1 - \frac{1}{5} - P(B) + P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A) = 1 - \frac{1}{5} - \frac{7}{10} + \frac{1}{10} \Leftrightarrow P(A) = \frac{1}{5}$$

$$P(\overline{B} \cap A) = \frac{1}{5} - \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$$

$$P(\overline{B}|A) = \frac{P(\overline{B} \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{5}} = \frac{5}{10} = 50\%$$

Resposta: (A)

4. Analisando cada opção

(A) No intervalo $[-1; 1]$, a função não é contínua, pelo que não se pode aplicar o teorema de Bolzano

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x + \sqrt{2}}{x - 1} = \frac{\sqrt{2}}{-1} = -\sqrt{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (-x^2 + 2) = 2$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, então não existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

Logo, f é descontínua em $x = 0$

(B) No intervalo $[-2; -1]$ a função f é contínua, e,

$$f(-2) = \frac{-2 + \sqrt{2}}{-2 - 1} > 0 \text{ e } f(-1) = \frac{-1 + \sqrt{2}}{-1 - 1} < 0$$

Logo, o teorema de Bolzano garante pelo menos um zero da função em $]-2; -1[$, e portanto, também em $[-2; -1]$

(C) No intervalo $[-3; -2]$ a função f é contínua, mas,

$$f(-2) = \frac{-2 + \sqrt{2}}{-2 - 1} > 0 \text{ e } f(-3) = \frac{-3 + \sqrt{2}}{-3 - 1} > 0$$

Logo, o teorema de Bolzano não garante pelo menos um zero da função em $]-3; -2[$

(D) No intervalo $[2; 3]$ a função f é contínua, mas,

$$f(2) = -2^2 + 2 = -2 < 0 \text{ e } f(3) = -3^2 + 2 = -7 < 0$$

Logo, o teorema de Bolzano não garante pelo menos um zero da função em $]2; 3[$

Resposta: (B)

5. $0 \in D_f$

A função f é contínua em $x = 0$, se existir $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, ou seja,

$$\text{se } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ex^2 + ex}{e^{x+1} - e} = \left(\frac{0}{0}\right) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ex(x+1)}{e(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{e^x - 1} \times \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x}}{1} \times 1 = \frac{1}{1} = 1 \end{aligned}$$

Aplicou-se o limite notável: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(2x) \cos(2x)}{2x^2 - x} = \left(\frac{0}{0}\right) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{2} \sin(4x)}{x(2x-1)} = \frac{1}{2} \lim_{4x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(4x)}{4x} \times 4 \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{2x-1} = \\ &= \frac{4}{2} \times 1 \times (-1) = -2 \end{aligned}$$

Aplicou-se o limite notável: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, então não existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

Logo, não existe k para o qual f é contínua em $x = 0$

6. .

6.1. Sabe-se que $A(\cos(x); \sin(x))$, com $\cos(x) > 0$ e $\sin(x) > 0$

$$C(1; \tan(x)), \text{ com } \tan(x) > 0$$

$$\overline{BC} = 2 \tan(x)$$

$$\overline{OE} = 1$$

$$\text{Área do setor circular: } A_1 = \frac{2x \times 1^2}{2} = x$$

$$\text{Área do triângulo } [BCO]: A_{[BCO]} = \frac{\overline{BC} \times \overline{OE}}{2} = \frac{2 \tan(x) \times 1}{2} = \tan(x)$$

Logo, a área da região colorida, é dada, em função de x , por

$$A(x) = A_{[BCO]} - A_1 = \tan(x) - x, \text{ com } x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$$

6.2. .

$$\begin{aligned} \cos^2(x) - \sin^2(x) = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \cos(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \vee 2x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Atribuindo valores a k , tem-se,

$$k = 0 \mapsto x = -\frac{\pi}{6} \vee x = \frac{\pi}{6}$$

$$k = 1 \mapsto x = \frac{5\pi}{6} \vee x = \frac{7\pi}{6}$$

$$k = -1 \mapsto x = -\frac{7\pi}{6} \vee x = -\frac{5\pi}{6}$$

$$\text{Portanto, } x = \frac{\pi}{6}$$

Logo, a área da região colorida, é igual a

$$A\left(\frac{\pi}{6}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) - \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{2\sqrt{3} - \pi}{6}$$

Resposta: (A)

$$7. \text{ Sabe-se que } \log_a \sqrt{b} = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \log_a b = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \log_a b = -3$$

Assim,

$$\begin{aligned} \log_b \left(\sqrt[4]{\frac{a^3}{b^2}} \right) &= \frac{1}{4} \log_b \left(\frac{a^3}{b^2} \right) = \frac{1}{4} (\log_b a^3 - \log_b b^2) = \frac{1}{4} (3 \log_b a - 2) = \frac{1}{4} \left(3 \times \frac{\log_a a}{\log_a b} - 2 \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left(3 \times \frac{1}{-3} - 2 \right) = \frac{1}{4} (-1 - 2) = -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

8. .

8.1. Função derivada de f

$$f'(x) = (e^{x^2-4} - x^2)' = (x^2 - 4)'e^{x^2-4} - 2x = 2xe^{x^2-4} - 2x = 2x(e^{x^2-4} - 1)$$

Zeros de $f'(x)$

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow 2x(e^{x^2-4} - 1) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \vee e^{x^2-4} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee e^{x^2-4} = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -2 \vee x = 2 \end{aligned}$$

Sinal de $f'(x)$

$$e^{x^2-4} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{x^2-4} > 1 \Leftrightarrow x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow x < -2 \vee x > 2$$

Quadro de sinal de $f'(x)$

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
$2x$	-	-	-	0	+	+	+
$e^{x^2-4} - 1$	+	0	-	-	-	0	+
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	\searrow	-3	\nearrow	$\frac{1}{e^4}$	\searrow	-3	\nearrow

$$f(0) = e^{-4} - 0^2 = \frac{1}{e^4}$$

$$f(-2) = e^{(-2)^2-4} - (-2)^2 = e^0 - 4 = -3$$

$$f(2) = e^{2^2-4} - 2^2 = e^0 - 4 = -3$$

A função f é crescente em $] -2; 0[$ e em $] 2; +\infty[$

A função f é decrescente em $]-\infty; -2[$ e em $]0; 2[$

A função atinge o mínimo absoluto -3 para $x = -2$ e para $x = 2$

A função atinge o máximo relativo $\frac{1}{e^4}$ para $x = 0$

8.2. Função segunda derivada de f

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left[2x \left(e^{x^2-4} - 1 \right) \right]' = (2x)' \times \left(e^{x^2-4} - 1 \right) + 2x \times \left(e^{x^2-4} - 1 \right)' = \\ &= 2 \times \left(e^{x^2-4} - 1 \right) + 2x \times \left((x^2-4)' e^{x^2-4} \right) = 2 \left(e^{x^2-4} - 1 \right) + 2x \times \left(2x e^{x^2-4} \right) = 2e^{x^2-4} - 2 + 4x^2 e^{x^2-4} = \\ &= e^{x^2-4} (4x^2 + 2) - 2 \end{aligned}$$

Declive da reta

$$m_t = f''(2) = e^{2^2-4} (4 \times 2^2 + 2) - 2 = e^0 (16 + 2) - 2 = 16$$

Ponto de tangência

$$T(2; f'(2))$$

$$f'(2) = 2 \times 2 \left(e^{2^2-4} - 1 \right) = 4 \left(e^0 - 1 \right) = 0$$

Logo, $T(2; 0)$

Reta tangente t

$$t : y = 16x + b, b \in \mathbb{R}$$

Como T é ponto da reta, vem,

$$0 = 16 \times 2 + b \Leftrightarrow b = -32$$

Portanto, $t : y = 16x - 32$

$$\begin{aligned} 9. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln(e^{x+1} - 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln \left(e^{x+1} \left(1 - \frac{1}{e^{x+1}} \right) \right)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln(e^{x+1}) + \ln \left(1 - \frac{1}{e^{x+1}} \right)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + x + 1 + \ln \left(1 - \frac{1}{e^{x+1}} \right)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 1}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 - \frac{1}{e^{x+1}} \right)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{x} \right) + \frac{0}{+\infty} = 2 \end{aligned}$$

10. Seja $z_A = |z_A|e^{i\theta}$, cujo afixo é o ponto A

Seja $z_C = |z_C|e^{i\theta} = |z_A|e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})}$, cujo afixo é o ponto C

Ora, deverá ter-se $z_C^n = z_A^n$

Assim,

$$z_C^n = z_A^n \Leftrightarrow |z_A|^n e^{i(n\theta + \frac{n\pi}{2})} = |z_A|^n e^{i(n\theta)}$$

$$\Leftrightarrow n\theta + \frac{n\pi}{2} = n\theta = k2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{n\pi}{2} = k2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = 4k, k \in \mathbb{Z}$$

Atribuindo valores a k

$$k = 0 \mapsto n = 0 \notin \mathbb{N}$$

$$k = 1 \mapsto n = 4 \in \mathbb{N}$$

$$k = 2 \mapsto n = 8 \in \mathbb{N}$$

$$k = -1 \mapsto n = -4 \notin \mathbb{N}$$

Resposta: o menor valor de n é 4

11. .

$$\overline{w_1} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\overline{w_1} + 1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + 1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$|\overline{w_1} + 1| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

Seja $\alpha = \operatorname{Arg}(\overline{w_1} + 1)$

$$\tan(\alpha) = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}, \text{ e } \alpha \in 4Q$$

$$\tan(\alpha) = -\sqrt{3}, \text{ e } \alpha \in 4Q$$

$$\text{Logo, } \alpha = -\frac{\pi}{3}$$

Assim, $\overline{w_1} + 1 = e^{i(-\frac{\pi}{3})}$

$$z_0 = \frac{\overline{w_1} + 1}{w_2} = \frac{e^{i(-\frac{\pi}{3})}}{2e^{i(-\frac{\pi}{6})}} = \frac{1}{2}e^{i(-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6})} = \frac{1}{2}e^{i(-\frac{\pi}{6})}$$

Seja z um número complexo

$$z^3 = z_0 \Leftrightarrow z = \sqrt[3]{z_0} \Leftrightarrow z = \sqrt[3]{\frac{1}{2}e^{i(-\frac{\pi}{6})}} \Leftrightarrow$$

$$z = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}e^{i\left(\frac{-\frac{\pi}{6} + k2\pi}{3}\right)}, \text{ com } k \in \{0; 1; 2\}$$

$$z = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} e^{i(-\frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3})}, \text{ com } k \in \{0; 1; 2\}$$

Atribuindo valores a k , tem-se,

$$k = 0 \mapsto z_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} e^{i(-\frac{\pi}{18})}$$

$$k = 1 \mapsto z_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} e^{i(\frac{11\pi}{18})}$$

$$k = 2 \mapsto z_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} e^{i(\frac{23\pi}{18})} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} e^{i(-\frac{13\pi}{18})}$$

$$\text{Portanto, } C.S. = \left\{ \sqrt[3]{\frac{1}{2}} e^{i(-\frac{\pi}{18})}; \sqrt[3]{\frac{1}{2}} e^{i(\frac{11\pi}{18})}; \sqrt[3]{\frac{1}{2}} e^{i(-\frac{13\pi}{18})} \right\}$$

$$\begin{aligned} 12. \quad f(x) = \ln(4) - x \Leftrightarrow \ln(2e^x + 2) = \ln(4) - x \Leftrightarrow \ln(2e^x + 2) = \ln(4) - \ln(e^x) \Leftrightarrow \ln(2e^x + 2) = \ln\left(\frac{4}{e^x}\right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2e^x + 2 = \frac{4}{e^x} \Leftrightarrow 2e^x + 2 - \frac{4}{e^x} = 0 \Leftrightarrow \frac{2(e^x)^2 + 2e^x - 4}{e^x} = 0 \Leftrightarrow 2(e^x)^2 + 2e^x - 4 = 0 \wedge e^x \neq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2(e^x)^2 + 2e^x - 4 = 0 \wedge \text{Condição universal} \Leftrightarrow 2(e^x)^2 + 2e^x - 4 = 0 \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $y = e^x$, vem

$$2y^2 + 2y - 4 = 0 \Leftrightarrow y^2 + y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-2)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow y = 1 \vee y = -2$$

Assim, como $y = e^x$, resulta

$$e^x = 1 \vee e^x = -2 \Leftrightarrow x = 0 \vee \text{Equação impossível} \Leftrightarrow x = 0$$

$$C.S. = \{0\}$$

13. .

13.1. Ora,

$$\overrightarrow{AB} = (0; -2; -2)$$

$$\overrightarrow{AD} = D - A = (3 - 2\sqrt{2}; -1; 1) - (3; -1; 1) = (-2\sqrt{2}; 0; 0)$$

Seja $\vec{\alpha}(a; b; c)$ um vetor normal ao plano ABC

Então,

$$\vec{\alpha} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \wedge \vec{\alpha} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$$

$$\Leftrightarrow (a; b; c) \cdot (0; -2; -2) = 0 \wedge (a; b; c) \cdot (-2\sqrt{2}; 0; 0) = 0$$

$$\Leftrightarrow -2b - 2c = 0 \wedge -2\sqrt{2}a = 0$$

$$\Leftrightarrow b = -c \wedge a = 0$$

Logo, $\vec{\alpha}(0; -c; c)$, com $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Considerando, $c = 1$, vem, $\vec{\alpha}(0; -1; 1)$

Assim,

A equação cartesiana do plano $[ABC]$ é da forma $-y + z + d = 0$, com $d \in \mathbb{R}$

Como $A(3; -1; 1)$ é ponto do plano, tem-se,

$$-(-1) + 1 + d = 0 \Leftrightarrow d = -2$$

Portanto,

$$ABC : -y + z - 2 = 0$$

13.2. Seja T o ponto médio do segmento $[BD]$

$$T\left(\frac{3+3-2\sqrt{2}}{2}; \frac{-3-1}{2}; \frac{-1+1}{0}\right), \text{ ou seja, } T(3-\sqrt{2}; -2; 0)$$

$$\overline{TE} = \sqrt{(3-\sqrt{2}-3+\sqrt{2})^2 + (-2-2)^2 + (0+4)^2} = \sqrt{0+16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{0+4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{Volume da pirâmide: } V_{pirâmide} = \frac{\overline{AB}^2 \times \overline{TE}}{3} = \frac{8 \times 4\sqrt{2}}{3} = \frac{32\sqrt{2}}{3}$$

Resposta: (D)

14. Sabe-se que

- $u_1 = \ln(e^a)$
- $u_2 = \frac{a}{2}$
- $u_3 = \log_2(4)$

são os três primeiros termos da progressão geométrica (u_n)

Então, tem-se,

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} \Leftrightarrow \frac{\frac{a}{2}}{\ln(e^a)} = \frac{\log_2(4)}{\frac{a}{2}} \Leftrightarrow \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}} = \frac{\log_2(4)}{\frac{a}{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{2\log_2(4)}{a} \Leftrightarrow a = 4\log_2(4) \Leftrightarrow a = 4\log_2(2^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = 4 \times 2 \Leftrightarrow a = 8$$

Assim,

$$u_1 = \ln(e^a) = a = 8$$

$$u_2 = \frac{a}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$r = \frac{u_2}{u_1} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Termo geral de (u_n)

$$u_n = 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2^3 \times 2^{1-n} = 2^{4-n}$$

$$\text{Procuremos } n \in \mathbb{N}, \text{ tal que } u_n = \frac{1}{1024}$$

$$u_n = \frac{1}{1024} \Leftrightarrow 2^{4-n} = \frac{1}{2^{10}} \Leftrightarrow 2^{4-n} = 2^{-10} \Leftrightarrow 4-n = -10 \Leftrightarrow n = 14 \in \mathbb{N}$$

Portanto, $\frac{1}{1024}$ é um termo da sucessão (u_n) , é o termode ordem catorze

15. Desenvolvendo $\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}\right)^8$, vem,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}\right)^8 = \\ &= \sum_{p=0}^8 \left[{}^8C_p \times \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{8-p} \times \left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)^p \right] = \\ &= \sum_{p=0}^8 \left[{}^8C_p \times \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^{8-p} \times \left(y^{-\frac{1}{2}}\right)^p \right] = \\ &= \sum_{p=0}^8 \left[{}^8C_p \times x^{\frac{p-8}{2}} \times y^{-\frac{p}{2}} \right] \end{aligned}$$

Como um dos termos deste desenvolvimento da forma $ax^{-3}y^{-1}$, com $a \in \mathbb{R}$

Procuremos p de modo que $\frac{p-8}{2} = -3 \wedge -\frac{p}{2} = -1 \wedge 0 \leq p \leq 8$

$$\frac{p-8}{2} = -3 \wedge -\frac{p}{2} = -1 \wedge 0 \leq p \leq 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p-8 = -6 \wedge p = 2 \wedge 0 \leq p \leq n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p = 2 \wedge 0 \leq p \leq n$$

$$\Leftrightarrow p = 2$$

Logo, $a = {}^8C_2 = 28$