

## Uma resolução do exame de Matemática A (2.ª fase de 2021)

1.1.  $\square$  O centro da superfície esférica é o ponto  $R(-5,5,-3)$  e o raio é  $\overline{RQ}$ , logo a sua equação reduzida

$$\text{é } (x+5)^2 + (y-5)^2 + (z+3)^2 = \overline{RQ}^2$$

Como  $\overline{RQ}^2 = (-2+5)^2 + (1-5)^2 + (1+3)^2 = 41$ , vem que a equação pedida é

$$(x+5)^2 + (y-5)^2 + (z+3)^2 = 41$$

1.2. O plano é perpendicular à reta  $RS$ , logo é perpendicular à reta  $PQ$  (pois  $RS \parallel PQ$ ), pelo que um vetor normal a esse plano é o vetor diretor de  $PQ$ , ie,  $\overline{PQ} = Q - P = (-3, 2, -1)$ . Assim, uma equação do plano é  $-3x + 2y - z + d = 0$ ; dado que  $P(1, -1, 2)$  está nesse plano, vem que:

$$-3 \times 1 + 2(-1) - 2 + d = 0 \Leftrightarrow d = 7$$

$\therefore$  a equação pedida é  $\boxed{-3x + 2y - z + 7 = 0}$

$$2. \operatorname{tg}(\pi - \alpha) + 2 \cos\left(-\frac{7\pi}{2} + \alpha\right)$$

$$= -\operatorname{tg}\alpha + 2 \cos\left(-4\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{tg}\alpha + 2(-\operatorname{sen}\alpha) = ?$$

$$= -\operatorname{tg}\alpha - 2\operatorname{sen}\alpha = ?$$

$$\operatorname{sen}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{5} \Leftrightarrow -\cos\alpha = -\frac{1}{5} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{1}{5}$$

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2\alpha + \frac{1}{25} = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2\alpha = \frac{24}{25}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha = \pm \frac{\sqrt{24}}{5} \xrightarrow{\alpha \in ]0, \frac{\pi}{2}[} \operatorname{sen}\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

$$\therefore \operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{2\sqrt{6}}{5}}{\frac{1}{5}} = 2\sqrt{6}$$

$$\therefore -\operatorname{tg}\alpha - 2\operatorname{sen}\alpha = -2\sqrt{6} - \frac{4\sqrt{6}}{5} = \frac{-10\sqrt{6} - 4\sqrt{6}}{5} = \boxed{\frac{-14\sqrt{6}}{5}}$$

3.1.  $\square$  Como se escolhem 6 raquetes, o n.º de casos possíveis é  ${}^{12}C_6$ ; se cada conjunto tem 3 raquetes de badminton e 3 de ténis, vem que

$$P = \frac{{}^6C_3 \times {}^6C_3}{{}^{12}C_6} \approx 0,4329$$

3.2. Sejam os acontecimentos  $B$ : «O sócio é mulher» e  $\bar{B}$ : «O sócio pratica badminton». Sabe-se que  $P(M) = 0,65$ ,  $P(B|\bar{M}) = \frac{1}{7}$  e  $P(M|B) = \frac{5}{6}$  e pretende-se determinar  $P(M \cap \bar{B})$ .

1.º processo Tem-se a tabela de contingência:

	$M$	$\bar{M}$	
$B$	$\frac{5}{6}a$	$\frac{1}{7} \times 0,35$ $= 0,05$	$a$
$\bar{B}$	$b$	$0,35 - 0,05$	$1 - a$
	$0,65$	$0,35$	$1$

Assim, tem-se:

$$\begin{cases} \frac{5}{6}a + 0,05 = a \\ b + 0,3 = 1 - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a + 0,3 = 6a \\ b + 0,3 = 1 - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,3 = a \\ b + 0,3 = 0,7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0,3 = a \\ b = 0,4 \end{cases} \rightarrow P(M \cap \bar{B}) = \boxed{40\%}$$

2.º processo  $P(M \cap \bar{B}) = P(M) - \underbrace{P(M \cap B)}_?$

$$= P(M) - [P(B) - P(B \cap \bar{M})]$$

$$= P(M) - P(B) + P(\bar{M}) \times P(B|\bar{M})$$

$$\text{Como se tem } P(M|B) = \frac{5}{6} \Leftrightarrow \frac{P(M \cap B)}{P(B)} = \frac{5}{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{6}{5} P(M \cap B) = P(B), \text{ vem que:}$$

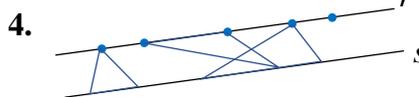
$$P(\bar{M}) - P(M \cap B) = P(\bar{M}) - P(B) + P(\bar{M}) \times P(B|\bar{M})$$

$$\Leftrightarrow -P(M \cap B) = -\frac{6}{5} P(M \cap B) + 0,35 \times \frac{1}{7}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{6}{5} - 1\right) P(M \cap B) = 0,05 \Leftrightarrow \frac{1}{5} P(M \cap B) = 0,05$$

$$\Leftrightarrow P(M \cap B) = 0,25$$

$$\therefore P(M \cap \bar{B}) = 0,65 - 0,25 = 0,4 = \boxed{40\%}$$



Para construir um triângulo, pode ser escolhido 1 ponto da reta  $r$  e 2 da reta  $s$  ou 2 pontos da reta  $r$  e 1 da reta  $s$ . Assim, tem-se:

$${}^5C_1 \times {}^n C_2 + {}^5C_2 \times {}^n C_1 = 175 \Leftrightarrow 5 \times \frac{nA_2}{2} + 10n = 175$$

$$\Leftrightarrow \frac{5n(n-1)}{2} + 10n = 175 \Leftrightarrow 5n^2 - 5n + 20n = 350$$

$$\Leftrightarrow 5n^2 + 15n - 350 = 0 \Leftrightarrow n^2 + 3n - 70 = 0$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 1 \times (-70)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow n = -10 \vee n = 7$$

$$\Leftrightarrow n = \boxed{7}$$

$$5. \square \lim v_n = 2 - 0^+ = 2^-$$

$$\therefore \lim g(v_n) = \lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = 1$$

6. Seja  $r$  a razão da progressão  $(u_n)$ . Pretende-se calcular:

$$S_{16} = \frac{16}{2}(u_1 + u_{16}) = 8(u_1 + u_1 + 15r) = 16u_1 + 120r$$

$$\text{Ora, } \begin{cases} u_6 + u_{20} = -5 \\ u_{19} = 4u_7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 5r + u_1 + 19r = -5 \\ u_1 + 18r = 4(u_1 + 6r) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 24r = -5 \\ -3u_1 = 6r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(-2r) + 24r = -5 \\ u_1 = -2r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 20r = -5 \\ u_1 = -2r \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = -\frac{5}{20} = -\frac{1}{4} \\ u_1 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\therefore S_{16} = 16 \times \frac{1}{2} + 120 \left(-\frac{1}{4}\right) = \boxed{-22}$$

$$7. \text{A } z \times w = i \rightarrow w = \frac{i}{2e^{i\frac{3\pi}{5}}} = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{2e^{i\frac{3\pi}{5}}} = \frac{1}{2} e^{i(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{5})}$$

$$= \frac{1}{2} e^{i(-\frac{\pi}{10})} = \frac{1}{2} e^{i(2\pi - \frac{\pi}{10})} = \frac{1}{2} e^{i\frac{19\pi}{10}}$$

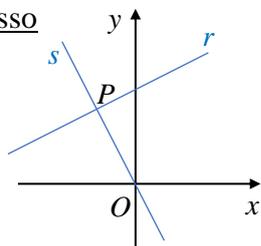
8. Seja  $z = x + yi$

$$\therefore (1+2i)(x+yi) + (1-2i)(x-yi) + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow x + yi + 2xi - 2y + x - yi - 2xi - 2y + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow -4y = -2x - 10 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \rightarrow \text{reta } r$$

1.º processo



O módulo de cada n.º complexo é a distância do seu afixo à origem. Como a menor distância é na perpendicular, basta encontrar o ponto de interseção entre a reta  $r$  e a reta  $s$ , que, por ser perpendicular a  $r$ , o seu declive é  $-\frac{1}{2} = -2$ , pelo que a sua equação é

$$y = -2x.$$

$$\therefore \begin{cases} y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \\ y = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \\ y = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x - x = 5 \\ y = -2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases} \rightarrow z = \boxed{-1+2i}$$

2.º processo  $z = x + (\frac{1}{2}x + \frac{5}{2})i$ , logo

$$|z| = \sqrt{x^2 + (\frac{1}{2}x + \frac{5}{2})^2} = \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{25}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{5}{4}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{25}{4}}; \text{ para minimizar o módulo de } z,$$

basta ver a abcissa da parábola associada (que tem a concavidade para cima):

$$\therefore -\frac{\frac{5}{2}}{2 \times \frac{5}{4}} = -1 \rightarrow z = -1 + \left(\frac{1}{2}(-1) + \frac{5}{2}\right)i = \boxed{-1+2i}$$

9.1. Em  $-\infty$ :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x} - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{x} = 1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{-x}$$

$$= 1 + (+\infty) = +\infty$$

$\therefore$  o gráfico de  $f$  não tem AH em  $-\infty$

Em  $+\infty$ :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} - 3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}}{x+1} - 3$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x+1} - 3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x(1+\frac{1}{x})} - 3 = \frac{\sqrt{1+0}}{1+0} - 3 = -2$$

$\therefore$  o gráfico de  $f$  tem uma AH em  $+\infty$ , de equação  $y = -2$

9.2. A equação pretendida é da forma  $y = mx + b$ , sendo  $m = f'(-2)$  e sabendo que a reta passa no ponto  $(-2, f(-2))$ ; dado que  $-2 < 0$ ,  $f(-2) = \frac{-2-e^2}{-2} = 1 + \frac{e^2}{2}$

$$f'(x) = \left(\frac{x-e^{-x}}{x}\right)' = \frac{(x-e^{-x})'x - (x-e^{-x})x'}{x^2} = \frac{(1+e^{-x})x - x + e^{-x}}{x^2}$$

$$\therefore f'(-2) = \frac{(1+e^2)(-2) + 2 + e^2}{(-2)^2} = \frac{-2e^2 + 2 + e^2}{4} = -\frac{e^2}{4}$$

Como o ponto  $(-2, 1 + \frac{e^2}{2})$  pertence à reta, vem que:

$$1 + \frac{e^2}{2} = -\frac{e^2}{4}(-2) + b \Leftrightarrow 1 + \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{2} = b \Leftrightarrow 1 = b$$

$$\therefore \text{ a equação pedida é } \boxed{y = -\frac{e^2}{4}x + 1}$$

$$10. h'(x) = (\text{sen } x)' + (\cos^2 x)' = \cos x + 2\cos x(\cos x)'$$

$$= \cos x + 2\cos x(-\text{sen } x)$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x(1 - 2\text{sen } x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \text{sen } x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{3\pi}{2} \end{cases} \vee x = \frac{\pi}{6}$$

$x$	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$h'$	+	+	0	-	///////
$h$	Mín.	↗	Máx.	↘	///////

$\therefore$  a função  $h$  é crescente em  $[0, \frac{\pi}{6}]$  e decrescente em

$$[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}].$$

$$\text{Mínimo relativo} = h(0) = \text{sen } 0 + \cos^2 0 = \boxed{1}$$

$$\begin{aligned} \text{Máximo relativo} &= h\left(\frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} + \cos^2\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \boxed{\frac{5}{4}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{11.1. } \square T(t_1) &= 30 \Leftrightarrow 20 + 100e^{-kt_1} = 30 \\ \Leftrightarrow 100e^{-kt_1} &= 10 \Leftrightarrow e^{-kt_1} = \frac{10}{100} \Leftrightarrow -kt_1 = \ln\frac{1}{10} \\ \Leftrightarrow -kt_1 &= \frac{\ln 1}{0} - \ln 10 \Leftrightarrow k = \frac{\ln 10}{t_1} \end{aligned}$$

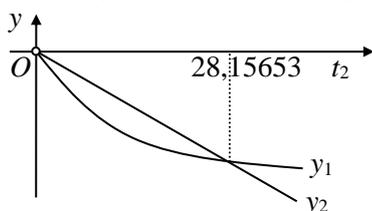
$$\text{11.2. } T(t) = 20 + 100e^{-0,04t}$$

Nos primeiros  $t_2$  minutos, a taxa média de variação é dada por  $\frac{T(t_2)-T(0)}{t_2-0} = \frac{T(t_2)-T(0)}{t_2}$

$$\therefore \frac{20+100e^{-0,04t_2}-120}{t_2} = -2,4 \Leftrightarrow \frac{100e^{-0,04t_2}-100}{t_2 \neq 0} = \underbrace{-2,4}_{y_2}$$

que é a equação a resolver na calculadora.

Gráficos na janela de visualização  $[0,50] \times [-100,5]$ .



$\therefore$  o valor de  $t_2$  é 28,15653 e, como  $0,15653 \times 60 \approx 9$ , vem que  $t_2 \approx \boxed{28\text{min}9\text{seg}}$

12.  $0 \notin D_g$  e  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$  existe, logo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) \\ \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3-x}{x^2-x} + k &= 2 + \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) \\ \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(x^2-1)}{x(x-1)} + k &= 2 + \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \right) \\ \Leftrightarrow \frac{0-1}{0-1} + k &= 2 - \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{-\ln x}{\frac{1}{x}} \right) \Leftrightarrow k = 1 - \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\ln x^{-1}}{\frac{1}{x}} \right) \\ \Leftrightarrow k &= 1 - \lim_{\frac{1}{x} \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \right) \Leftrightarrow k = 1 - 0 \Leftrightarrow k = \boxed{1} \end{aligned}$$

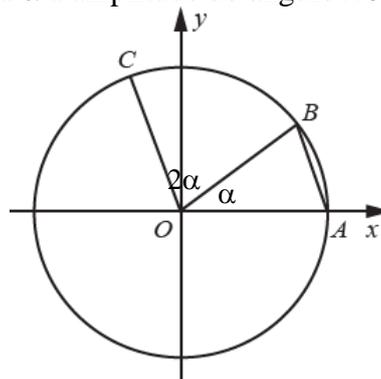
13. O domínio da condição é:

$$\{x \in \mathbb{R} : \underbrace{1-x > 0}_{x < 1} \wedge \underbrace{3-2x > 0}_{x < \frac{3}{2}}\} = ]-\infty, 1[ ;$$

Nesse domínio:

$$\begin{aligned} x \ln(1-x) - \ln(1-x) &= (1-x) \ln(3-2x) \\ \Leftrightarrow (x-1) \ln(1-x) - (1-x) \ln(3-2x) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1) \ln(1-x) + (x-1) \ln(3-2x) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)[\ln(1-x) + \ln(3-2x)] &= 0 \\ \Leftrightarrow x-1 = 0 \vee \ln(1-x) + \ln(3-2x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \underbrace{x=1}_{\notin D} \vee \ln[(1-x)(3-2x)] &= 0 \\ \Leftrightarrow \ln(3-2x-3x+2x^2) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 3 &= \underbrace{e^0}_1 \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25-4 \times 2 \times 2}}{2 \times 2} \\ \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee \underbrace{x=2}_{\notin D} \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

14. Seja  $\alpha$  a amplitude do ângulo  $AOB$ .



Atendendo à figura, a ordenada de  $C$  é igual a:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(2\alpha + \alpha) &= \operatorname{sen}(2\alpha) \cos \alpha + \cos(2\alpha) \operatorname{sen} \alpha \\ &= 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \cos \alpha + (\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) \operatorname{sen} \alpha \\ &= 2 \operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha + (\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) \operatorname{sen} \alpha \\ &= 2 \operatorname{sen} \alpha (1 - \operatorname{sen}^2 \alpha) + (1 - \operatorname{sen}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) \operatorname{sen} \alpha \\ &= 2 \operatorname{sen} \alpha - 2 \operatorname{sen}^3 \alpha + \operatorname{sen} \alpha - 2 \operatorname{sen}^3 \alpha \\ &= 3 \operatorname{sen} \alpha - 4 \operatorname{sen}^3 \alpha = ? \end{aligned}$$

Dado que a área do  $\Delta[AOB]$  é  $k$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{1 \times \operatorname{sen} \alpha}{2} = k &\Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha = 2k \Rightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha = 4k^2 \wedge \operatorname{sen}^3 \alpha = 8k^3 \\ \therefore \operatorname{sen}(2\alpha + \alpha) &= 3 \times 2k - 4 \times 8k^3 = 6k - 32k^3 \quad \square \text{ QED} \end{aligned}$$

**FIM**