

Uma resolução do exame de Matemática A (época especial de 2021)

1.1. \boxed{C} α é um plano perpendicular à reta BE , pelo que um vetor normal a esse plano é o vetor $\overrightarrow{BE} = (-1, 6, 2)$. Assim, uma equação do plano é $-x + 6y + 2z + d = 0$; dado que $(1, 0, 1)$ está em α , vem que:

$$-1 + 6 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + d = 0 \Leftrightarrow d = -1$$

\therefore a equação pedida é

$$-x + 6y + 2z - 1 = 0 \Leftrightarrow x - 6y - 2z + 1 = 0$$

1.2. Sabe-se que $A(0, 0, z)$ e $B(x, 0, 0)$, onde:

$$B = E + \overrightarrow{EB} = (-2, 6, 2) + (1, -6, -2) = (-1, 0, 0)$$

Volume da pirâmide = 20 $\Leftrightarrow \frac{1}{3} \times$ área da base \times altura = 20

Como a base da pirâmide está no plano xOz , a sua altura é a ordenada de E .

$$\therefore \frac{1}{3} \times$$
 área da base $\times 6 = 20 \Leftrightarrow$ área da base = 10

\therefore a base é um quadrado de área 10.

$$\therefore \overline{AB} = \sqrt{10} \Leftrightarrow \sqrt{(0+1)^2 + (0-0)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{10}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+z^2} = \sqrt{10} \Leftrightarrow 1+z^2 = 10 \Leftrightarrow z^2 = 9 \Leftrightarrow z = 3$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} = (-1, 0, 0) - (0, 0, 3) = \boxed{(-1, 0, -3)}$$

2. $\overline{BS} + \overline{TA} = r - \overline{OS} + r - \overline{OT} = 2r - \overline{SO} - \overline{TO} = ?$

Seja α a amplitude do ângulo POT .

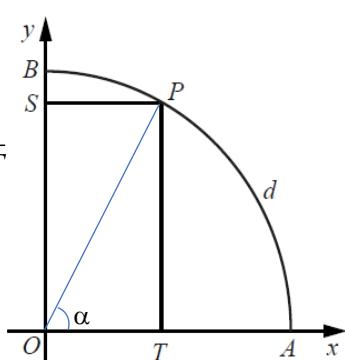
$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{PT}}{r} \Leftrightarrow r\operatorname{sen}\alpha = \overline{PT}$$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{OT}}{r} \Leftrightarrow r\cos\alpha = \overline{OT}$$

Arco AB : $d = \alpha r \Leftrightarrow \frac{d}{r} = \alpha$

$$\therefore \overline{PT} = \overline{SO} = r\operatorname{sen}\left(\frac{d}{r}\right) \text{ e}$$

$$\overline{TO} = r\cos\left(\frac{d}{r}\right)$$



$$\therefore \overline{BS} + \overline{TA} = 2r - r\operatorname{sen}\left(\frac{d}{r}\right) - r\cos\left(\frac{d}{r}\right)$$

$$= r[2 - \operatorname{sen}\left(\frac{d}{r}\right) - \cos\left(\frac{d}{r}\right)] \boxed{\text{QED}}$$

3. \boxed{B} Os pontos em causa são $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(0, 2), \dots, (0, 10)$, ie, existem $11^2 = 121$ pontos nessas condições (n.º de casos possíveis); dado que, os pontos da reta de equação $y = x + 7$ são $(0, 7)$, $(1, 8)$, $(2, 9)$ e $(3, 10)$, vem que $P = \frac{4}{121} \approx 0,033$

4. Três livros e três canetas ao Armando, e os restantes objetos ao Catarino: ${}^5C_3 \times {}^7C_3$

Quatro livros e duas canetas ao Armando, e os restantes objetos ao Catarino: ${}^5C_4 \times {}^7C_2$

Como podemos trocar os netos, vem que o n.º pedido é $({}^5C_3 \times {}^7C_3 + {}^5C_4 \times {}^7C_2) \times 2 = \boxed{910}$

$$5. P(\overline{A} \cap \overline{B}) + 2P(A) = P(\overline{A \cup B}) + 2P(A)$$

$$= 1 - P(A \cup B) + 2P(A)$$

$$= 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] + 2P(A)$$

$$= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) + 2P(A)$$

$$= 1 + P(A) - P(B) + P(A) \times P(B | A)$$

$$= 1 + P(A) - \frac{3P(A)}{2} + \frac{P(A)}{2}$$

$$= 1 + \cancel{P(A)} - \cancel{P(A)} = 1 \boxed{\text{QED}}$$

$$6. \boxed{A} \lim u_n = \lim [n(2n-1)] = +\infty \times (+\infty) = +\infty$$

$$\therefore \lim \frac{1}{u_n} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$$

$\therefore \lim f\left(\frac{1}{u_n}\right) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \rightarrow$ o único gráfico cujo limite à direita de 0 é $+\infty$ é o de (A).

7. Os termos de ordem ímpar são

$u_1 = 3, u_3 = 7, u_5 = 11, \dots$, ou seja, trata-se de uma progressão aritmética de 1.º termo 3 e razão 4.

$$\therefore S_{200} = \frac{u_1 + u_{200}}{2} \times 200 = (u_1 + u_1 + 199r) \times 100$$

$$= (2 \times 3 + 199 \times 4) \times 100 = \boxed{80\,200}$$

$$8. \boxed{C} z_1 + z_2 = e^{i\theta} + 2e^{i(\theta+\pi)}$$

$$= \cos(\theta) + i\operatorname{sen}(\theta) + 2\cos(\theta + \pi) + 2i\operatorname{sen}(\theta + \pi)$$

$$= \cos(\theta) + i\operatorname{sen}(\theta) - 2\cos(\theta) - 2i\operatorname{sen}(\theta)$$

$= -[\cos(\theta) + i\operatorname{sen}(\theta)] = -e^{i\theta} \rightarrow$ simétrico de z_1 , cujo afixo está no 3.º Q (pois o de z_1 está no 1.º Q).

$$9. iz^2 + \left(\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{2}\right)^2 \times (-2i)^3 - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow iz^2 + \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{4} (-8i^3) - 2 = 0 \Leftrightarrow iz^2 + \frac{i(8i)}{4} - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow iz^2 - 2 - 2 = 0 \Leftrightarrow z^2 = \frac{4}{i} \times \frac{i}{i} \Leftrightarrow z^2 = -4i$$

$$\Leftrightarrow z^2 = 4e^{i(-\frac{\pi}{2})} \Leftrightarrow z = \sqrt{4e^{i(-\frac{\pi}{2})}} \Leftrightarrow z = \sqrt{4} e^{\frac{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{2}}$$

com $k \in \{0, 1\}$

$$k = 0 \rightarrow \boxed{2e^{-\frac{i\pi}{4}}}$$

$$k = 1 \rightarrow \boxed{2e^{\frac{i3\pi}{4}}}$$

10.1. f é contínua em $x = 1$, logo:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2 + \ln(3 - 2 \times 1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sin(x-1)}{1-x^2} + k$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2 + \frac{\ln 1}{0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{(1-x)(1+x)} + k$$

$$\Leftrightarrow -1 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x-1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{1+x} + k$$

lim.not.

$$\Leftrightarrow -1 = 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + k \Leftrightarrow -1 + \frac{1}{2} = k \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2}$$

10.2. Em $]-\infty, 1[$, $f'(x) = (x - 2 + \ln(3 - 2x))'$

$$= 1 + \frac{-2}{3-2x} = 1 - \frac{2}{3-2x}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{2}{3-2x} = 0 \Leftrightarrow 1 = \frac{2}{3-2x} \Leftrightarrow 3 - 2x = \frac{2}{1}$$

$$\Leftrightarrow 3 - 2 = 2x \Leftrightarrow \frac{1}{2} = x$$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1
f'	/////////	+	0	-	/////////
f	/////////	↗	Máx.	↘	/////////

\therefore a função f é crescente em $]0, \frac{1}{2}]$, é decrescente em

$[\frac{1}{2}, 1[$ e tem um máximo relativo igual a

$$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - 2 + \ln(3 - 2 \times \frac{1}{2}) = -\frac{3}{2} + \ln 2$$

11.

$$g(x) = \log_2(1 - \cos x) + \log_2(1 + \cos x) + 2 \log_2(2 \cos x)$$

$$= \log_2(1 - \cos x) + \log_2(1 + \cos x) + \log_2(2 \cos x)^2$$

$$= \log_2[(1 - \cos x)(1 + \cos x)(4 \cos^2 x)]$$

$$= \log_2[(1 - \cos^2 x)(4 \cos^2 x)]$$

$$= \log_2[(\sin^2 x)(4 \cos^2 x)] = \log_2(2 \sin x \cos x)^2$$

$$= 2 \log_2(2 \sin x \cos x) = 2 \log_2(\sin(2x)) \quad \boxed{\text{QED}}$$

12.1. $\boxed{\text{D}}$ O número de bactérias vivas existentes no tubo

$$\text{tende para } \lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = N_0 e^{\lim_{t \rightarrow +\infty} [t(1,08 - 0,3t)]}$$

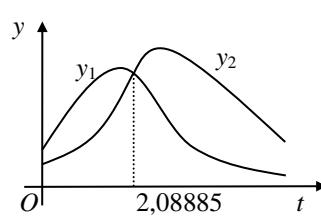
$$= N_0 e^{+\infty(-\infty)} = N_0 e^{-\infty} = N_0 \times 0 = 0$$

$$\boxed{\text{12.2. } N(t) = 1,63e^{1,08t-0,3t^2}}$$

Num certo instante, t_1 , havia, no tubo de ensaio, mais meio milhar de bactérias vivas do que uma hora antes desse instante, logo a equação a resolver na calculadora é $N(t_1) = 0,5 + N(t_1 - 1)$, ie:

$$\boxed{\frac{1,63e^{1,08t-0,3t^2}}{y_1} = 0,5 + \frac{1,63e^{1,08(t-1)-0,3(t-1)^2}}{y_2}}$$

Gráficos na janela de visualização $[0,5] \times [0,5]$:



\therefore o valor de t_1 é 2,08885 horas.

Dado que $0,08885 \times 60 \approx 5$, vem que $t_1 \approx 2\text{h}5\text{min}$

13. $y = b$ quando $x \rightarrow \pm\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

\therefore existe uma assíntota, em $-\infty$, de equação $\boxed{y = 1}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{e^{x-2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{x-2}} \\ &= \frac{1}{\lim_{x-2 \rightarrow +\infty} e^{x-2} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} x-1} = \frac{1}{+\infty \times 1} = 0 \end{aligned}$$

\therefore existe outra assíntota, em $+\infty$, de equação $\boxed{y = 0}$

14. No domínio $[-2, 2]$, tem-se:

$$e^{-x}(4 + e^{2x}) \geq 5 \Leftrightarrow 4e^{-x} + e^{-x+2x} \geq 5$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{e^x} + e^x \underset{(e^x)}{\geq} 5 \Leftrightarrow 4 + e^{2x} \geq 5e^x$$

$$\Leftrightarrow \frac{(e^x)^2 - 5e^x + 4 \geq 0}{y^2 - 5y + 4}$$

Zeros de $y^2 - 5y + 4$: 1 e 4



$$\therefore (e^x)^2 - 5e^x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \leq 1 \vee e^x \geq 4$$

$$\Leftrightarrow x \leq 0 \vee x \geq \ln 4 \Leftrightarrow \boxed{x \in [-2, 0] \cup [\ln 4, 2]} \quad x \in [-2, 2]$$

15. Sejam a a abcissa de A e b a abcissa de B e seja t a reta tangente aos 2 gráficos.

$$f'(x) = 4x \rightarrow f'(a) = 4a$$

$$g'(x) = -2(x-1) \rightarrow g'(b) = -2(b-1)$$

$$\therefore 4a = -2(b-1) \Leftrightarrow 4a = -2b + 2 \Leftrightarrow 2a = -b + 1$$

$$\Leftrightarrow b = 1 - 2a$$

O declive de t é dado por $\frac{f(a) - g(b)}{a - b} = \frac{2a^2 + (b-1)^2}{a - b}$

$$= \frac{2a^2 + (1-2a)^2}{a - (1-2a)} = \frac{2a^2 + 4a^2}{3a-1} = \frac{6a^2}{3a-1}$$

$$\therefore \frac{6a^2}{3a-1} = 4a \Leftrightarrow \frac{6a^2}{3a-1} = \frac{12a^2 - 4a}{3a-1} \Leftrightarrow \frac{4a - 6a^2}{3a-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2a(2-3a) = 0 \wedge 3a-1 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0 \vee \frac{2}{3} = a \wedge a \neq \frac{1}{3}$$

$$\therefore b = 1 - 2 \times \frac{2}{3} = -\frac{1}{3} \rightarrow \boxed{a = \frac{2}{3} \wedge b = -\frac{1}{3}}$$