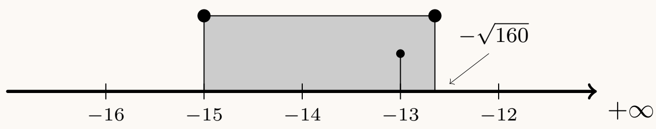
Prova final de Matemática - 3.º ciclo (2022, 2.ª fase)

Proposta de resolução

Caderno 1

1. Como $-\sqrt{160} \approx -12{,}6$, logo $-12 \notin [-15, -\sqrt{16}]$, pelo que o maior número inteiro que pertence ao intervalo é -13.



Resposta: **Opção C**

2. Como no período considerado o total de energia elétrica produzida, em Portugal, foi de 430 mil milhões quilowatts-hora e, no mesmo período, a percentagem de energia elétrica obtida a partir da luz solar pela utilização de painéis solares, foi 1,1%, temos que a energia correspondente a esta percentagem, é:

$$430 \times \frac{1{,}1}{100} = 4{,}73 \text{ mil milhões quilowatts-hora}$$

Assim, escrevendo este número em notação científica, vem:

$$4{,}73 \text{ mil milhões quilowatts-hora} = 4\,730\,000\,000 \text{ quilowatts-hora} = 4{,}73 \times 10^9 \text{ quilowatts-hora}$$

3. Ordenando os dados da tabela, temos:

$$\underbrace{27 \;\; 34 \;\; 34 \;\; 40}_{4} \;\; \underbrace{47}_{\tilde{x}} \;\; \underbrace{48 \;\; 51 \;\; 57 \;\; 58}_{4}$$

E assim a mediana deste conjunto de números é $\tilde{x} = 47$

Resposta: **Opção C**

4.

4.1. Como o triângulo $[CEB]$ é retângulo em E, recorrendo ao Teorema de Pitágoras, para calcular o valor de $\overline{CE}$:

$$\overline{CE}^2 + \overline{BE}^2 = \overline{BC}^2 \Leftrightarrow \overline{CE}^2 + 5^2 = 10^2 \Leftrightarrow \overline{CE}^2 + 25 = 100 \Leftrightarrow \overline{CE}^2 = 100 - 25 \underset{\overline{CE}>0}{\Rightarrow} \overline{CE} = \sqrt{75} \text{ cm}$$

Assim, como $\sqrt{75} \approx 8{,}66$, o valor de $\overline{CE}$ em centímetros, arredondado às décimas é 8,7 cm.

4.2. Temos que:

- O ângulo ACB é o ângulo inscrito relativo ao arco AB, a amplitude do ângulo é metade da amplitude do arco, ou seja:

$$A\hat{C}B = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} = \frac{60}{2} = 30^\circ$$

- Como $E\hat{C}B = A\hat{C}B$ temos que $E\hat{C}B = 30^\circ$
- Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, e $C\hat{E}D = 90^\circ$ vem que:

$$E\hat{B}C + E\hat{C}B + C\hat{E}B = 180 \Leftrightarrow E\hat{B}C + 30 + 90 = 180 \Leftrightarrow E\hat{B}C = 180 - 90 - 30 \Leftrightarrow E\hat{B}C = 60^\circ$$

Como o ângulo $E\hat{B}C = D\hat{B}C$ e o DBC é o ângulo inscrito relativo ao arco CD, a amplitude do arco é o dobro da amplitude do ângulo, ou seja:

$$\overset{\frown}{AD} = 2 \times D\hat{B}C = 2 \times 60 = 120^\circ$$

Resposta: **Opção B**

5. Podemos calcular o volume do tronco de cone, como a diferença dos volumes dos cones cujas bases têm diâmetros $[AB]$ e $[CD]$
Assim, calculando o volume dos dois cones, temos que:

- a altura do cone cuja base tem diâmetro $[AB]$ é 160 m e como a base é um círculo cujo diâmetro mede 4 m, a medida do raio da base é 2 m, e assim vem que:

$$V_{C_{[AB]}} = \frac{A_\circ \times \text{altura}}{3} = \frac{\pi \times 2^2 \times 160}{3} = \frac{\pi \times 4 \times 160}{3} = \frac{640\pi}{3} \text{ m}^3$$

- a altura do cone cuja base tem diâmetro $[CD]$ é 80 m e como a base é um círculo cujo diâmetro mede 2 m, a medida do raio da base é 1 m, e assim vem que:

$$V_{C_{[CD]}} = \frac{A_\circ \times \text{altura}}{3} = \frac{\pi \times 1^2 \times 80}{3} = \frac{80\pi}{3} \text{ m}^3$$

E assim temos que o volume do tronco de cone, em metros cúbicos, arredondado às unidades, é:

$$V = V_{C_{[AB]}} - V_{C_{[CD]}} = \frac{640\pi}{3} - \frac{80\pi}{3} = \frac{640\pi - 80\pi}{3} = \frac{560\pi}{3} \approx 586 \text{ m}^3$$

6. Como o triângulo $[JFG]$ é retângulo em F, e, relativamente ao ângulo JGF, o lado $[FG]$ é o cateto adjacente e o lado $[JG]$ é a hipotenusa, usando a definição de coseno, temos:

$$\cos J\hat{G}F = \frac{\overline{FG}}{\overline{JG}} \Leftrightarrow \cos 26^\circ = \frac{10}{\overline{JG}} \Leftrightarrow \overline{JG} = \frac{10}{\cos 26^\circ}$$

Assim, como $\overline{IJ} = 16$ dm, a área do painel, ou seja a área do retângulo $[GHIJ]$ em decímetros quadrados, arredondado às unidades, é:

$$A_{[GHIJ]} = \overline{JG} \times \overline{IJ} = \frac{10}{\cos 26^\circ} \times 16 \approx 178 \text{ dm}^2$$

Caderno 2

7. Usando as regras operatórias de potências e escrevendo o resultado na forma de uma potência de base $\frac{1}{4}$, temos que:

$$\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2}{4^6} \times 4^{-3} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2}{\left(\frac{1}{4}\right)^{-6}} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{-(-3)} = \left(\frac{1}{4}\right)^{2-(-6)} \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^8 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^{8+3} = \left(\frac{1}{4}\right)^{11}$$

8.

8.1. No agrupamento existem 24 turmas, das quais 5 são do 6.º ano (A, B, C, D e D). Assim, escolhendo ao acaso uma das turmas do agrupamento, a probabilidade, calculada com recurso à Regra de Laplace, da turma escolhida ser do 6.º ano, é:

$$p = \frac{5}{24}$$

Resposta: **Opção B**

8.2. Como existem 5 turmas do 6.º ano e 3 turmas do 9.º ano, o número total de pares de turmas que podem ser escolhidos são $5 \times 3 = 15$, dos quais, apenas 3 correspondem a pares em que as duas turmas são designadas pela mesma letra, como se pode observar na tabela seguinte:

9.º ano \ **6.º ano**	A	B	C	D	E
A	AA	AB	AC	AD	AE
B	BA	BB	BC	BD	BE
C	CA	CB	CC	CD	CE

Assim, calculando a probabilidade pela Regra de Laplace, de escolher duas turmas nas condições indicadas e ambas serem designadas pela mesma letra, e escrevendo o resultado na forma de fração irredutível, temos:

$$p = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

9. Como o ponto C pertence ao gráfico da função f e tem ordenada 9, designando por a a abcissa dos pontos C e B, temos que:

$$f(a) = 9 \Leftrightarrow a^2 = 9 \underset{a>0}{\Rightarrow} a = \sqrt{9} \Leftrightarrow a = 3$$

Como os pontos A e C têm a mesma ordenada e pertencem ao gráfico da função f (simétrico relativamente ao eixo Oy) então têm ordenadas simétricas, pelo que a área do trapézio $[AOBC]$, na forma de dízima, é:

$$A_{[AOBC]} = \frac{\overline{AC} + \overline{OB}}{2} \times \overline{BC} = \frac{2 \times \overline{OB} + 3}{2} \times 9 = \frac{2 \times 3 + 3}{2} \times 9 = \frac{9}{2} \times 9 = \frac{81}{2} = 40{,}5$$

10. Resolvendo a inequação, temos:

$$\frac{2x-5}{3}+\frac{1}{2}x>2(x-1) \Leftrightarrow \frac{2x}{3}-\frac{5}{3}+\frac{x}{2}>2x-2 \Leftrightarrow \frac{2x}{3}_{(2)}-\frac{5}{3}_{(2)}+\frac{x}{2}_{(3)}>\frac{2x}{1}_{(6)}-\frac{2}{1}_{(6)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x}{6}-\frac{10}{6}+\frac{3x}{6}>\frac{12x}{6}-\frac{12}{6} \Leftrightarrow 4x-10+3x>12x-12 \Leftrightarrow 4x+3x-12x>-12+10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -5x>-2 \Leftrightarrow 5x<2 \Leftrightarrow x<\frac{2}{5}$$

C.S.$=\left]-\infty,\frac{2}{5}\right[$

11. Como a equação está escrita na fórmula canónica, usando a fórmula resolvente para resolver a equação, e escrevendo as soluções na forma de fração irredutível, temos:

$(a=12,\ b=-7$ e $c=1)$

$$12x^2-7x+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4(12)(1)}}{2(12)} \Leftrightarrow x=\frac{7\pm\sqrt{49-48}}{24} \Leftrightarrow x=\frac{7\pm\sqrt{1}}{24} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{7+1}{24} \vee x=\frac{7-1}{24} \Leftrightarrow x=\frac{8}{24} \vee x=\frac{6}{24} \Leftrightarrow x=\frac{1}{3} \vee x=-\frac{1}{4}$$

C.S.$=\left\{\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right\}$

12. Como a função g é uma função de proporcionalidade inversa, a sua expressão algébrica é da forma

$$g(x)=\frac{k}{x},\ k\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

Assim, substituindo as coordenadas do ponto P (que pertence ao gráfico da função), podemos calcular o valor de k:

$$12=\frac{k}{3} \Leftrightarrow 12\times 3=k \Leftrightarrow 36=k$$

Pelo que uma expressão que define a função g é $g(x)=\frac{36}{x}$

Resposta: **Opção C**

13. Como os triângulos são semelhantes porque têm um ângulo comum e os lados opostos são paralelos, e a razão de semelhança da ampliação é 2 (porque $[AC]$ e $[AB]$ são lados correspondentes e $\overline{AC}=2\overline{AB}$), e a razão das áreas de figuras semelhantes é o quadrado da razão de semelhança, temos que:

$$r^2=\frac{A_{[ACD]}}{A_{[ABE]}} \Leftrightarrow 2^2=\frac{20}{A_{[ABE]}} \Leftrightarrow A_{[ABE]}=\frac{20}{4} \Leftrightarrow A_{[ABE]}=5$$

Resposta: **Opção B**

14. Como x é o número de adultos que participaram na visita e y é o número de crianças que participaram na mesma visita, e O número de adultos era o dobro do número de crianças, então temos que $x = 2y$

    Como o preço de entrada para cada adulto foi 12 euros, as entradas de todos os adultos tiveram um custo de $12x$, e o custo das entradas de todas as crianças foi de $7{,}5y$, porque cada criança pagou 7,5 euros. Desta forma o custo de todas as entradas é $12x + 7{,}5y$, e como este custo foi de 252 euros, vem que $12x + 7{,}5y = 252$

    Assim, um sistema de equações cuja resolução permite determinar o número de adultos e o número de crianças, desse grupo de amigos, que visitaram a exposição, é:

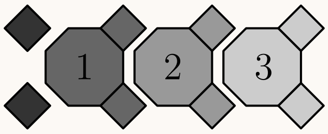
$$\begin{cases} 12x + 7{,}5y = 252 \\ \\ x = 2y \end{cases}$$

    Resposta: **Opção A**

15. Observando que cada termo pode ser obtido, relativamente ao anterior, acrescentando 1 octógono e 2 quadrados, o número de quadrados acrescentados a cada termo é o dobro do número de octógonos acrescentados.

    Como o primeiro termo tem 1 octógono e 4 quadrados (ou seja 2+2), cada termo terá um número de octógonos igual à ordem do termo e um número de quadrados que é o dobro do número de óctogonos acrescido de duas unidades.

    Ou seja, o termo de ordem n tem n octógonos e $2n + 2$ quadrados.



3.º termo

    Assim, no termo que tem 32 quadrados, o número de quadrados é 30+2, em que 30 é o dobro do número de octógonos; ou seja, o número de octógonos deste termo é $\dfrac{30}{2} = 15$

16. Analisando cada uma das afirmações, temos que:

(1) A primeira linha refere-se ao conjunto das percentagens de energia elétrica produzida por via hídrica e por via eólica, e pela observação do gráfico podemos observar que foi em **2017**, porque corresponde à produção por via hídrica mais baixa e a um dos anos em que a produção por via eólica foi mais baixa.

(2) A segunda linha refere-se também ao conjunto das percentagens de energia elétrica produzida por via hídrica e por via eólica, e pela observação do gráfico podemos observar que, nos anos constantes na tabela, foi em **2014**, que a produção combinada das duas fontes foi superior a 50%, porque a produção por via hídrica foi superior a 30% e a produção por via eólica foi superior a 20%.

(3) A terceira linha refere-se apenas à produção de energia elétrica por via eólica, e pela observação do gráfico podemos observar que, nos anos constantes na tabela, foi em **2019**, que a produção por esta via foi superior a 25%, ou seja mais de um quarto da energia elétrica total produzida.

		2012	2014	2015	2017	2019
(1)	A percentagem de energia elétrica produzida por via hídrica e por via eólica, em conjunto, foi a mais baixa.				**X**	
(2)	Em conjunto, a energia elétrica produzida por via hídrica e por via eólica foi superior a 50%.		**X**			
(3)	Mais de um quarto da energia elétrica total foi produzida por via eólica.					**X**